Relations, fonctions, applications

Tony Bourdier (2012)

Table des matières

1 Relations

1.1 Définitions

Définition 1.1 : On appelle **relation** binaire de l'ensemble E dans l'ensemble F tout sous ensemble de $E \times F$:

$$\mathcal{R} \subseteq E \times F$$

E est l'**ensemble de départ** ou **domaine** de la relation $\mathcal{R}$ et F l'**ensemble d'arrivée**.

Remarque 1.2 : De la définition découle qu'une relation est assimilée à un ensemble.

Remarque 1.3 : Puisqu'une relation de E dans F est un éléments de $\mathcal{P}(E \times F)$, si E et F sont deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et m, le nombre de relations possibles est $2^{n \times m}$.

Définition 1.4 : Soit $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ (*i.e.* une relation de E dans F). On dit que $x \in E$ est en relation par $\mathcal{R}$ avec $y \in F$ si

$$(x, y) \in \mathcal{R}$$

On note également $x \mathcal{R} y$ ou encore $\mathcal{R}(x, y)$.

Remarque 1.5 : On dit que y est **une image** de x par $\mathcal{R}$ ou encore que x est **un antécédent** de y par $\mathcal{R}$.

Exemple 1.6 : Soient les ensembles suivants $M = \{$Maths Discrètes, Statistiques, Info, SSG, Claquettes$\}$ et $E = \{$Bourdier, Deltour, Jussien, Ledoux, Obama$\}$. On peut définir la relation $\mathcal{E} \subseteq E \times M$ d'ensemble de départ E et d'ensemble d'arrivée M suivante : $\mathcal{E} = \{$(Bourdier, Maths Discrètes), (Jussien, Maths Discrètes), (Jussien, Info), (Ledoux, Info), (Deltour, SSG), (Bourdier, Statistiques)$\}$. On remarque que « Obama » n'a pas d'image par $\mathcal{E}$ et que « Claquettes » ne possède pas d'antécédent par $\mathcal{E}$.

Définition 1.7 : On appelle **domaine** d'une relation $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ et l'on note $Dom(\mathcal{R})$ l'ensemble des éléments de E qui ont une image dans F par $\mathcal{R}$.

Remarque 1.8 : Si $\mathcal{R} \subseteq E \times F$, on a nécessairement $Dom(\mathcal{R}) \subseteq E$.

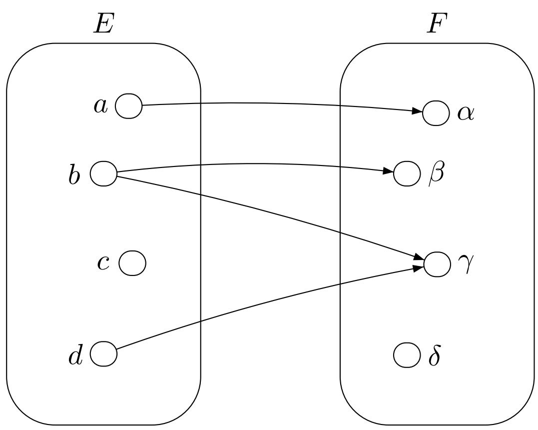
Définition 1.9 : On appelle **image** (ou **codomaine)** d'une relation $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ et l'on note $Im(\mathcal{R})$ l'ensemble des éléments de F possédant au moins un antécédent dans E par $\mathcal{R}$.

Remarque 1.10 : Si $\mathcal{R} \subseteq E \times F$, on a nécessairement $Im(\mathcal{R}) \subseteq F$.

1.2 Représentation

Si E et F sont deux ensembles finis, alors toute relation $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ est nécessairement fini. Dans ce cas, on peut donner à $\mathcal{R}$ une représentation dite **sagittale** : les ensembles E et F sont représensés par des « patatoïdes » et un élément x de E est relié par une flèche orienté vers un élément y de F si $(x, y) \in \mathcal{R}$

Exemple 1.11 : Soient $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ deux ensembles et la relation $\mathcal{R} = \{(a, \alpha), (b, \beta), (b, \gamma), (d, \gamma)\}$. Une représentation saggitale de la relation $\mathcal{R}$ est donnée par le graphe suivant :



On visualise immédiatement $Dom(\mathcal{R}) = \{a, b, d\}$ et $Im(\mathcal{R}) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

1.3 Relation réciproque

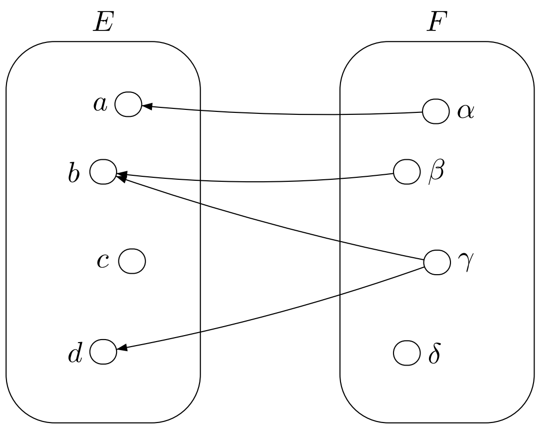
Définition 1.12 : On appelle **relation réciproque** d'une relation $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ la relation définie par :

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y,x) \in F \times E \mid (x,y) \in \mathcal{R}\}$$

i.e. $(y,x) \in \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in \mathcal{R}$ (ou encore $y\,\mathcal{R}^{-1}\,x \Leftrightarrow x\,\mathcal{R}\,y$).

Remarque 1.13 : Pour obtenir la représentation sagittale de $\mathcal{R}^{-1}$, il faut et il suffit de modifier le sens des flèches de la représentation sagittale de $\mathcal{R}$.

Exemple 1.14 : Si l'on reprend d'exemple précédent, une représentation saggitale de $\mathcal{R}^{-1}$ est donnée par :



Remarque 1.15 : Les résultats suivants découlent immédiatement de la définition (et se vérifient visuellement sur le graphe) :

$$\begin{cases} Dom(\mathcal{R}) = Im(\mathcal{R}^{-1}) \\ Dom(\mathcal{R}^{-1}) = Im(\mathcal{R}) \\ (\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R} \end{cases}$$

1.4 Image et image réciproque d'une partie

Définition 1.16 : Soient $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ (*i.e.* une relation de E dans F) et $A \subseteq E$. On appelle **image de A par $\mathcal{R}$** et l'on note

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ (x,y) \in \mathcal{R}\}$$

l'ensemble des images des éléments de A par $\mathcal{R}$.

Remarque 1.17 : Si $\mathcal{R} \subseteq E \times F$, $\mathcal{R}(E) = Im(\mathcal{R})$.

Remarque 1.18 : Soient $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ et $A \subseteq E$. Si $A \cap Dom(\mathcal{R}) = \varnothing$, alors $\mathcal{R}(A) = \varnothing$.

Définition 1.19 : Soient $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ (*i.e.* une relation de E dans F) et $B \subseteq F$. On appelle **image réciproque de** B **par** $\mathcal{R}$ et l'on note

$$\mathcal{R}^{-1}(B) = \{x \in E \mid \exists y \in B,\ (x,y) \in \mathcal{R}\} = \left\{x \in E \mid \exists y \in B,\ (y,x) \in \mathcal{R}^{-1}\right\}$$

l'ensemble des antécédents des éléments de B par $\mathcal{R}$.

Remarque 1.20 : Si $\mathcal{R} \subseteq E \times F$, $\mathcal{R}^{-1}(F) = Dom(\mathcal{R})$.

Remarque 1.21 : Soient $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ et $B \subseteq F$. Si $B \cap Im(\mathcal{R}) = \varnothing$, alors $\mathcal{R}^{-1}(B) = \varnothing$.

1.5 Restriction, prolongement, égalité

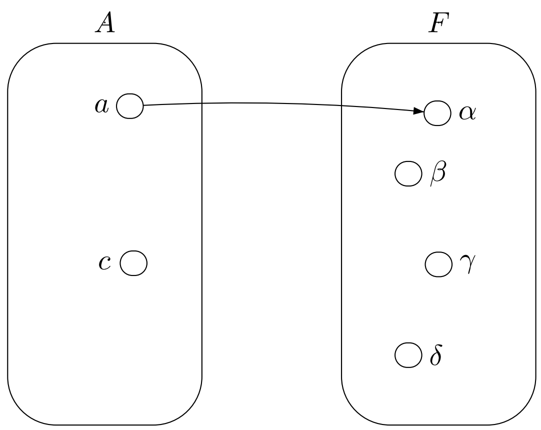
Définition 1.22 : Soient $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ une relation de E dans F et $A \subseteq E$. On appelle **restriction de** $\mathcal{R}$ **à** A et l'on note généralement

$$\mathcal{R}_{|A} = \mathcal{R} \cap (A \times F)$$

Définition 1.23 : Soient $\mathcal{R}_1 \subseteq E \times F$ une relation de E dans F et $\mathcal{R}_2 \subseteq A \times F$ où $A \subseteq E$. Si $\mathcal{R}_2$ est la restriction de $\mathcal{R}_1$ à A, alors $\mathcal{R}_1$ est **un prolongement** de $\mathcal{R}_2$ à E.

Remarque 1.24 : $\mathcal{R}_2$ est **la** restriction de $\mathcal{R}_1$ à A mais $\mathcal{R}_1$ est **un** prolongement de $\mathcal{R}_2$ à E.

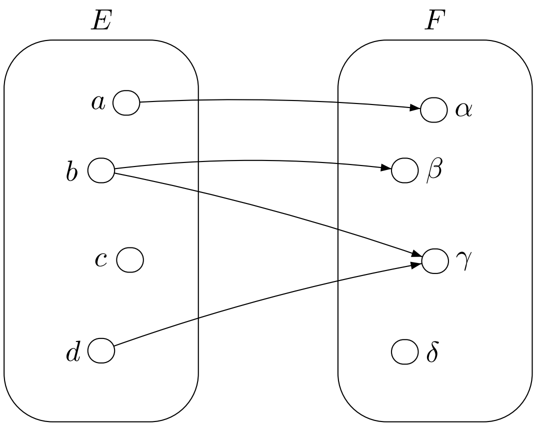
Exemple 1.25 : On considère de nouveau la relation $\mathcal{R}$ définie dans les précédents exemple ainsi que sa restriction à $A = \{a, c\}$, $\mathcal{R}_{|A}$ de représentation sagittale :



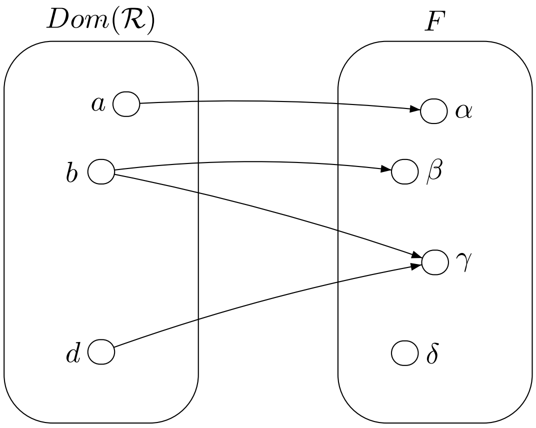
Définition 1.26 : Deux relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont égales si et seulement si :
- elles ont le même ensemble de départ
- elles ont le même ensemble d'arrivée
- elles contiennent les mêmes couples

Remarque 1.27 : Il faut bien faire attention à ne pas oublier les deux premiers points ! En particulier, la restriction de $\mathcal{R}$ à $Dom(\mathcal{R})$ ne change pas le contenu de $\mathcal{R}$ mais change l'ensemble de départ. Ces deux relations ne sont alors pas égales, ce qui se vérifie sur la représentation sagittale.

Exemple 1.28 :



et

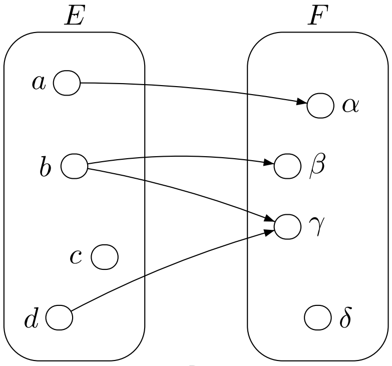


ne sont pas égales. On voit bien que, même si les éléments de $\mathcal{R}$ (représentés par les flèches) sont les mêmes, elles ne sont pas définies sur les mêmes ensembles.

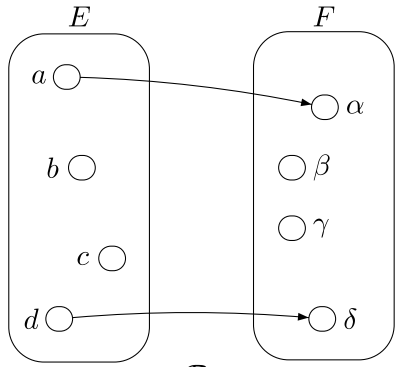
1.6 Opérations ensemblistes

Une relation étant avant tout un ensemble, on s'autorise sur les relations les mêmes opérations que sur les ensembles, dans la mesure où **les ensembles de départ et d'arrivées restent inchangés**. Nous nous contenterons d'illustrer le complémentaire, l'union et l'intersection par des représentations saggitales.

Exemple 1.29 : Soient les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ suivantes :

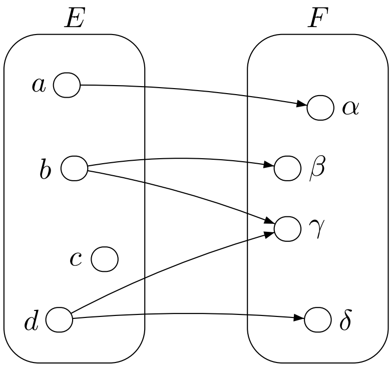


$\mathcal{R}_1$

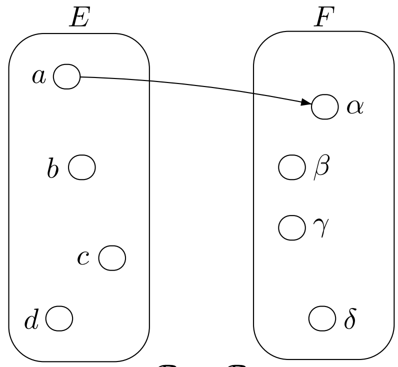


$\mathcal{R}_2$

L'union et l'intersection sont données par :

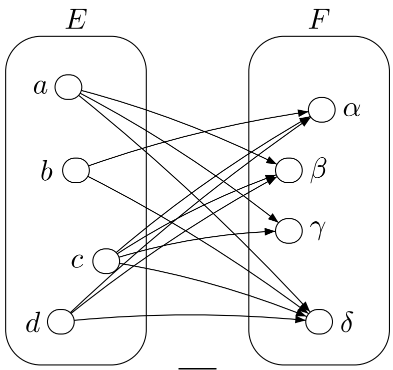


$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$



$\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$

Et le complémentaire par :



$\overline{\mathcal{R}_1}$

Définition 1.30 : Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations de E dans F. On dit que $\mathcal{R}_1$ est une **sur-relation** de $\mathcal{R}_2$ ou encore que $\mathcal{R}_2$ est une **sous-relation** de $\mathcal{R}_1$ si les éléments (*i.e.* les flèches dans la représentation sagittale) de $\mathcal{R}_2$ sont tous dans $\mathcal{R}_1$.

Remarque 1.31 : En particulier, $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est une sous-relation de $\mathcal{R}_1$ et de $\mathcal{R}_2$. $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ est, quant à elle, une sur-relation de $\mathcal{R}_1$ et de $\mathcal{R}_2$.

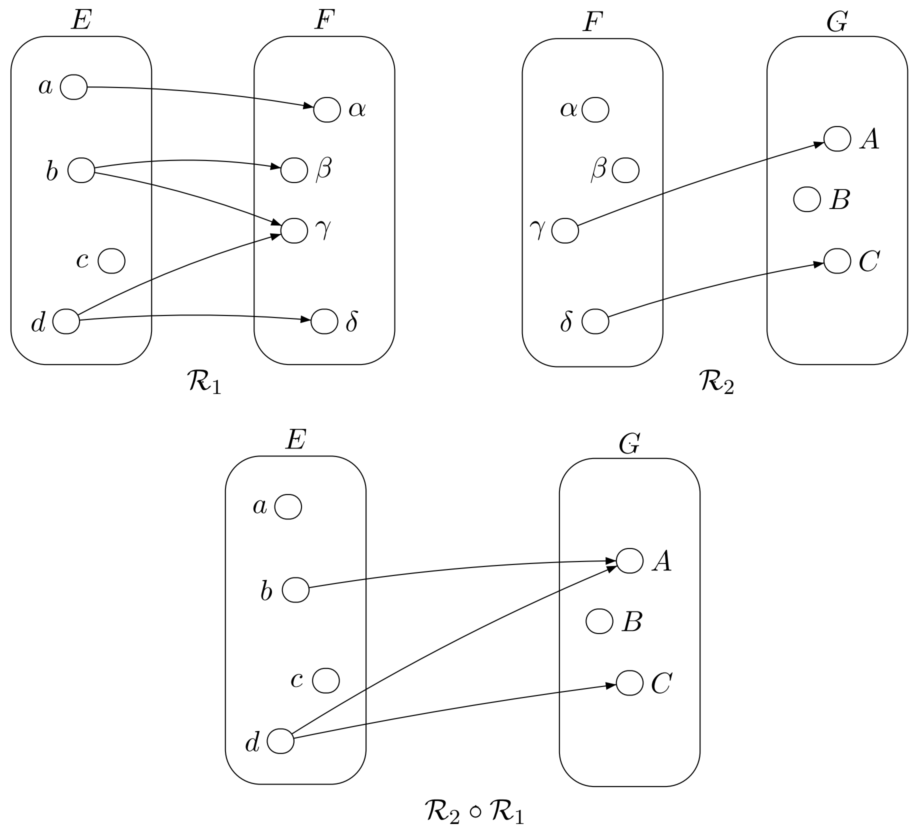
1.7 Composition

Définition 1.32 : Soient $\mathcal{R}_1 \subseteq E_1 \times F_1$ et $\mathcal{R}_2 \subseteq E_2 \times F_2$ (*i.e.* deux relations de E_1, resp. E_2, dans F_1, resp. F_2). Si et seulement si $F_1 = E_2$, on appelle **composée de** $\mathcal{R}_1$ **par** $\mathcal{R}_2$ et on note :

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 \subseteq E_1 \times F_2 = \{(x,z) \in E_1 \times F_2 \mid \exists y \in F_1,\ (x,y) \in \mathcal{R}_1 \text{ et } (y,z) \in \mathcal{R}_2\}$$

la relation d'ensemble de départ E_1 et d'ensemble d'arrivée F_2 composée de l'ensemble des couples (x,z) pour lesquels on peut trouver au moins un $y \in F_1 = E_2$ tel que $x\,\mathcal{R}_1\,y$ et $y\,\mathcal{R}_2\,z$.

Exemple 1.33 :



Remarque 1.34 : Soit $n > 2$. On peut étendre la définition des relations binaires aux relations n-aires en constatant qu'une relation n-aire est une relation binaire dont l'ensemble de départ est un produit cartésien.

1.8 Propriétés

Définition 1.35 : Soit $\mathcal{R} \subseteq E \times E$ une relation. $\mathcal{R}$ est dite **réflexive** si

$$\forall x \in E,\ (x, x) \in \mathcal{R}$$

$\mathcal{R}$ est dite **irréflexive** si

$$\forall x \in E,\ (x, x) \notin \mathcal{R}$$

Définition 1.36 : Soit $\mathcal{R} \subseteq E \times E$ une relation. $\mathcal{R}$ est dite **symétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \big((x, y) \in \mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \quad (y, x) \in \mathcal{R}\big)$$

$\mathcal{R}$ est dite **antisymétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y,\ \big((x, y) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad (y, x) \notin \mathcal{R}\big)$$

Remarque 1.37 : Cette définition peut également s'écrire :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \big((x \,\mathcal{R}\, y) \text{ et } (y \,\mathcal{R}\, x)\big) \Rightarrow x = y$$

Définition 1.38 : Soit $\mathcal{R} \subseteq E \times E$ une relation. $\mathcal{R}$ est dite **transitive** si

$$\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x, y) \in \mathcal{R} \text{ et } (y, z) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in \mathcal{R}$$

1.9 Relations d'équivalence

Définition 1.39 : Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est
- réflexive
- symétrique
- transitive

Remarque 1.40 : L'égalité est une relation d'équivalence.

Exemple 1.41 : Soit $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2,\ x \,\mathcal{R}\, y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ x - 3 \times p = y - 3 \times q)$$

autrement dit, $x \,\mathcal{R}\, y$ si et seulement si x et y ont le même reste dans la division euclidienne par 3. Par exemple $3 \,\mathcal{R}\, 0$ ou encore $4 \,\mathcal{R}\, 13$.
On vérifie simplement que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :
- $\mathcal{R}$ est réflexive. En effet, $\forall x \in E,\ x \,\mathcal{R}\, x$.
- $\mathcal{R}$ est symétrique. En effet, si x a le même reste que y dans la division euclidienne par 3, alors y a le même reste que x ...
- $\mathcal{R}$ est transitive. En effet, si x a le même reste que y dans la division euclidienne par 3 et si y a le même reste que z dans la division euclidienne par 3, alors si x a le même reste que z dans la division euclidienne par 3.

Définition 1.42 : Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et x un élément de E. On appelle classe d'équivalence de x l'ensemble :

$$\langle\, x \,\rangle_{\mathcal{R}} = \{y \in E \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

La classe d'équivalence d'un élément est simplement l'ensemble des éléments de E qui lui sont équivalents.

Exemple 1.43 : Si l'on reprend l'exemple précédent, on a :
- $\langle\, 0 \,\rangle_{\mathcal{R}} = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$
- $\langle\, 1 \,\rangle_{\mathcal{R}} = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots\}$
- $\langle\, 2 \,\rangle_{\mathcal{R}} = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}$

Remarque 1.44 : Soit $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E. $\forall (x, y) \in E^2$

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ ssi } \langle\, x \,\rangle_{\mathcal{R}} = \langle\, y \,\rangle_{\mathcal{R}}$$

1.10 Relations d'ordre

Définition 1.45 : Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si $\mathcal{R}$ est
- réflexive
- antisymétrique
- transitive

Remarque 1.46 : La relation « est inférieur ou égal à », usuellement notée « $\leq$ » est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. A noter que pour éviter toute ambiguïté, nous devrions écrire $\leq_{\mathbb{N}}$.

Remarque 1.47 : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. On dit que deux éléments x et y sont **comparables** ssi

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ ou } y \,\mathcal{R}\, x$$

Définition 1.48 : Une relation d'ordre sur E est **totale** si tous les éléments de E sont comparables. Sinon, la relation est dite **partielle**.

Exemple 1.49 : Soient $E = \{0, 1\}^2$ et soit $\leq_E$ la relation définie par :

$$\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in E^2, \quad \big((x_1, x_2) \leq_E (y_1, y_2)\big) \Leftrightarrow \big(x_1 \leq y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2\big)$$

On s'aperçoit que $\leq_E$ est une relation d'ordre partielle. En effet, on ne peut pas comparer $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

Définition 1.50 : Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre strict** si $\mathcal{R}$ est
- irréflexive
- antisymétrique
- transitive

Remarque 1.51 : On peut se dispenser de la condition d'antisymétrie dans la définition puisque l'irréflexité et la transitivité impliquent l'antisymétrie.

Remarque 1.52 : La relation sur $\mathbb{N}$ « est strictement inférieur à », usuellement notée « $<$ » est une relation d'ordre strict.

2 Fonctions, applications

2.1 Définitions

Définition 2.1 : Soit $f \subseteq E \times F$ une relation de E dans F. f est une **fonction** de E dans F si et seulement si tout élément de E possède au plus une (soit zéro, soit une) image dans F par f :

$$\forall x \in E,\ card\big(f\big(\{x\}\big)\big) \leq 1$$

autrement dit, quelque soit x de E, $f\big(\{x\}\big)$ (l'ensemble des images de x par f) est soit l'ensemble vide, soit un singleton.

Remarque 2.2 : Soit f une fonction de E dans F et x un élément de E. S'il existe $y \in F$ tel que $(x, y) \in f$, alors y est unique et est notée $f(x)$.

Définition 2.3 : Lorsque l'on définit une fonction f de E dans F, on note :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

et on lit « f est une fonction de E dans F qui à x associe $f(x)$ ». On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des fonctions de E dans F.

> **Exemple 2.4 :** La fonction « cosinus »
>
> $$cos: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & [-1, 1] \\ x & \mapsto & cos(x) \end{array}$$
>
> appartient à $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [-1, 1])$. On peut également définir la fonction « carré »
>
> $$carre: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x \times x \end{array}$$

Remarque 2.5 : Lorsque l'on n'a pas besoin de spécifier le nom de la fonction que l'on manipule et qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les ensembles de départ et d'arrivée, on peut désigner une fonction directement par son expression : $x \mapsto f(x)$

> **Exemple 2.6 :** Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on peut écrire directement $x \mapsto x \times x$ pour désigner la fonction « carré », ou encore $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Remarque 2.7 : Lorsque l'ensemble de départ E d'une fonction f est un produit cartésien de n ensembles $E_1, \ldots, E_n$, on dit que f est une fonction d'**arité** n ou encore une fonction

à n variables et l'on note :

$$f: \begin{array}{ccc} E_1 \times \ldots \times E_n & \to & F \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

x_i est appelée $i^{\text{ième}}$ variable de f.

> **Exemple 2.8 :** La fonction « puissance » qui appartient à $\mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{N}, \mathbb{R})$ est définie par
>
> $$puiss: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ (x, n) & \mapsto & x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{array}$$
>
> Elle est d'arité 2, x est sa première variable et n sa seconde variable.

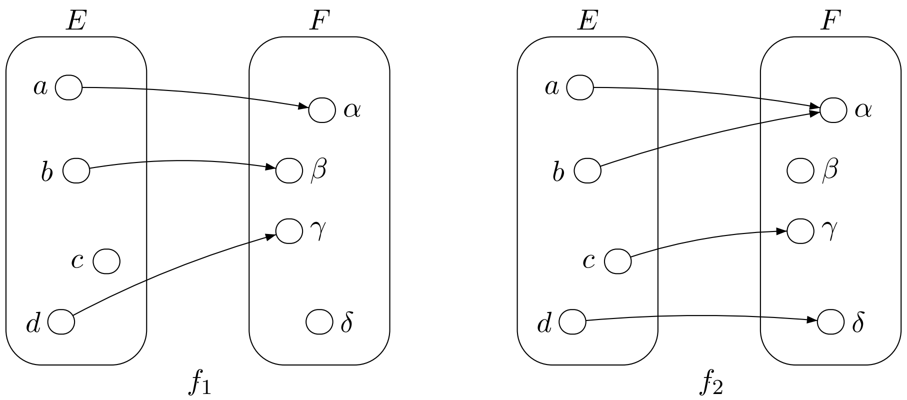
Définition 2.9 : Soit $f : E \to F$ une fonction de E dans F. On dit que f est une **application** (ou une **fonction totale**) si

$$E = Dom(f)$$

autrement dit si tous les éléments de l'ensemble de départ possèdent une image par f dans l'ensemble d'arrivée :

$$\forall x \in E,\ card\big(f(\{x\})\big) = 1$$

Remarque 2.10 : Si f est une fonction, sa restriction à son domaine est une application.

> **Exemple 2.11 :** Soient deux relations f_1 et f_2 de E dans F de représentation sagittale :
>
> 
>
>
> f_1 est une fonction et f_2 est non seulement une fonction, mais également une application :
>
> $$f_2: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & \begin{cases} \alpha & \text{si } x = a \text{ ou } x = b \\ \gamma & \text{si } x = c \\ \delta & \text{si } x = d \end{cases} \end{array}$$

Remarque 2.12 : La composition de deux fonctions est une fonction et la composition de deux applications est une application.

Remarque 2.13 : En lieu et place de l'expression suivante :

$$\text{« Soit } \left\{ \begin{array}{llll} f : & E_1 \times \ldots \times E_n & \to & F \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & y \end{array} \right. \text{ »}$$

on peut dire :

« Soit f la fonction telle que $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n,\ f(x_1, \ldots, x_n) = y$ »

2.2 Injection, surjection, bijection

Définition 2.14 : Une application $f : E \to F$ est dite **injective** ou est une **injection** ssi $\forall y \in F$, il existe **au plus** un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ (tout élément y de F admet au plus un antécédent x par f).

Remarque 2.15 : L'application $f : E \to F$ est injective ssi on ne peut pas trouver de $y \in F$ possédant plusieurs antécédents par f dans E :

$$\nexists (y, x, x') \in F \times E \times E,\ y = f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x'$$

ce qui s'écrit également :

$$\forall (x, x') \in E^2,\ (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

Remarque 2.16 : f est injective ssi il n'existe pas deux éléments différents de E qui ont la même image dans F. Autrement dit, deux éléments distincts ne peuvent pas avoir la même image :

$$\forall (x, x') \in E^2,\ (x \neq x' \ \Rightarrow\ f(x) \neq f(x'))$$

Définition 2.17 : Une application $f : E \to F$ est dite **surjective** ou est une **surjection** ssi pour tout y dans l'ensemble d'arrivée F, il existe **au moins** un élément x de l'ensemble de départ E tel que $f(x) = y$:

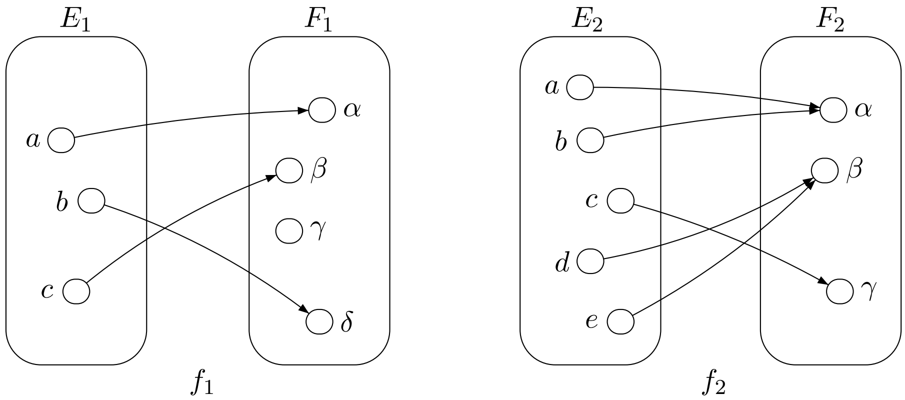
$$\forall y \in F,\ \exists\, x \in E,\ y = f(x)$$

Tout élément y de F admet au moins un antécédent x par f.

Remarque 2.18 : L'application $f : E \to F$ est surjective ssi on ne peut pas trouver de $y \in F$ ne possédant pas d'antécédent par f dans E.

Remarque 2.19 : L'application $f : E \to F$ est surjective ssi $f(E) = Im(f) = F$.

> **Exemple 2.20 :** Soient E_1, E_2, F_1 et F_2 quatre ensembles finis et $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ deux applications :



f_1 est une injection et f_2 est une surjection.

Remarque 2.21 : L'exemple précédent illustre un phénomène connu sous le nom de **lemme des tiroirs** et qui affirme que si E a plus d'éléments que F, il est impossible de construire une injection de E dans F.

Remarque 2.22 : De la même façon, si F contient plus d'éléments que E, alors il est impossible de construire une surjection de E dans F.

Proposition 2.23 : Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On a les propriétés suivantes :
- f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective
- f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

Définition 2.24 : Une application $f : E \to F$ est dite **bijective** ou est une **bijection** si pour tout y dans l'ensemble d'arrivée F il existe **un et un seul** x dans l'ensemble de départ E tel que $f(x) = y$:

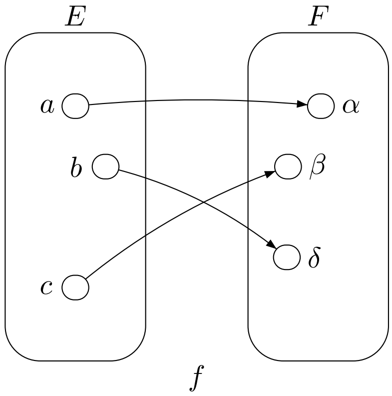
$$\forall y \in F,\ \exists !\, x \in E,\ y = f(x)$$

Tout élément y de F admet un unique antécédent x par f.

Remarque 2.25 : Soit $f : E \to F$ une application. On a l'équivalence suivante :

$$f \text{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad (f \text{ injective et } f \text{ surjective})$$

Exemple 2.26 : L'application $f : E \to F$



est bijective.

Remarque 2.27 : Si l'application $f : E \to F$ est bijective, alors sa relation réciproque f^{-1} est une application, bijective et : $\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x$ et $\forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y$.

Remarque 2.28 : Attention à l'écriture abusive de $f^{-1}(y)$. Cette écriture n'a de sens que lorsque f^{-1} est une application, ce qui est le cas si f est bijective et alors $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y. On ne peut pas écrire $f^{-1}(y)$ en général : si l'on cherche les antécédents de y par une application f quelconque, alors il faut écrire $f^{-1}(\{y\})$ qui sera alors $\{x \in E \mid f(x) = y\}$.

2.3 Applications remarquables

Nous allons dresser ici la liste de quelques applications très souvent utilisées.

Définition 2.29 : On appelle **projection canonique** de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ sur E_i l'application

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n & \to & E_i \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

qui à tout n-uplet retourne le $i^{\text{ème}}$ élément.

Remarque 2.30 : Si tous les E_k sont égaux, $(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = E^n)$, alors on parle simplement de la $i^{\text{ème}}$ projection.

Définition 2.31 : On appelle application **identité** de E l'application définie par :

$$\begin{array}{ccccc} id_E & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$$

On la note parfois id s'il n'y a pas d'ambiguïté sur E.

Remarque 2.32 : $\forall f \in \mathcal{F}(E, F)$ bijective, $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$.

Définition 2.33 : Soit E un ensemble et $A \subseteq E$. On appelle application **caractéristique** ou **indicatrice** de A l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_A : E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

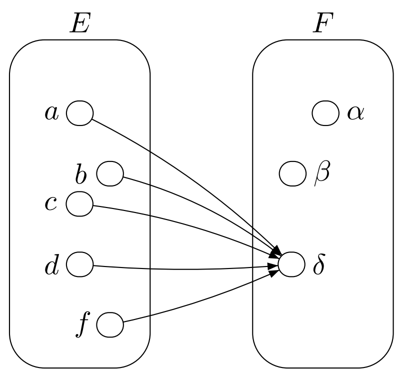
Définition 2.34 : Une application $f : E \to F$ est dite **constante** si

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ f(x) = f(y)$$

Remarque 2.35 : Si E est non vide, la définition est équivalente à

« f est constante ssi $card\big(Im(f)\big) = 1$. »

Exemple 2.36 : L'application $f : E \to F$ suivante :



est une application constante. $\forall x \in E,\ f(x) = \delta$.

Définition 2.37 : Soit E un ensemble **fini**. On appelle **permutation** de E toute application bijective de E dans E. L'ensemble des permutation de E est noté $\mathfrak{S}(E)$

Exemple 2.38 : Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble.

$$\begin{array}{rcl} \sigma : E & \to & E \\ x & \mapsto & \begin{cases} b & \text{si } x = a \\ c & \text{si } x = b \\ a & \text{si } x = c \\ d & \text{si } x = d \end{cases} \end{array}$$

est une permutation de E.

Remarque 2.39 : Si $card(E) = n < \infty$, alors il existe $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ (n factoriel) permutations de E.

Définition 2.40 : Une application $f : E^n \to F$ d'arité n est dite **symétrique** si elle est invariante par permutation :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}([1,n]),\ \forall (x_1, \ldots, , x_n) \in E^n,\ f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

autrement dit, une application qui ne tient pas compte le l'ordre des « éléments d'entrée ».

Définition 2.41 : Une **transposition** est une **permutation** qui « échange » deux éléments et qui laisse invariant les autres éléments.

Exemple 2.42 : Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble.

$$\begin{array}{rcl} \sigma : E & \to & E \\ x & \mapsto & \begin{cases} a & \text{si } x = a \\ c & \text{si } x = b \\ b & \text{si } x = c \\ d & \text{si } x = d \end{cases} \end{array}$$

est une transposition de E.

2.4 Exercices

▷ *Exercice 2.43 :* Pour chaque relation suivante, précisez si la relation est réflexive, irréflexive, symétrique, antisymétrique et transitive :

1. la relation d'égalité sur les entiers
2. la relation de perpendicularité sur l'ensemble des droites
3. la relation de parallélisme sur l'ensemble des droites
4. la relation « est le carré de » sur les entiers

En déduire lesquelles sont des relations d'ordre et lesquelles sont des relations d'équivalence.

▷ *Exercice 2.44 :* Soit $R \subseteq \mathbb{N} \times \{a, b, c\} \times \mathbb{N}$ définie par

$$R = \{(0, a, 1), (2, a, 0), (1, b, 3), (3, b, 2), (3, a, 9), (0, b, 4)\}$$

1. R est-elle une fonction ?
2. R est-elle une application ?
3. Formalisez l'ensemble des antécédents de 1.
4. Déterminez un ensemble R' tel quel $R \cup R'$ soit une application.

▷ *Exercice 2.45 :* Soit $R \subseteq \mathbb{N} \times \{a, b, c\} \times \mathbb{N}$ définie par

$$R = \{(0, a, 0), (0, a, 1), (1, b, 3), (1, b, 2), (3, b, 9), (3, c, 4)\}$$

1. R est-elle une fonction ?

2. R est-elle une application ?
3. Déterminez une fonction f à partir de laquelle on peut retrouver R.
4. Déterminez une application g à partir de laquelle on peut retrouver R.

▷ *Exercice 2.46 :* Que peut-on dire d'une relation à la fois symétrique et antisymétrique ?

▷ *Exercice 2.47 :* Parmi les assertions suivantes, cochez celles qui sont vraies.

1. ☐ La relation d'inclusion au sens large entre parties d'un même ensemble est une relation d'ordre.
2. ☐ Deux classes d'équivalence qui ont un élément communs ont confondues.
3. ☐ Si f est une application d'un ensemble fini dans lui-même, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ bijective}$$

▷ *Exercice 2.48 :* Soit $E = \{0, 1, 2\}$. Parmi les graphes suivants, lesquels définissent une relation d'équivalence sur E ?

1. ☐ $\Gamma = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$
2. ☐ $\Gamma = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2)\}$
3. ☐ $\Gamma = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,2)\}$
4. ☐ $\Gamma = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$
5. ☐ $\Gamma = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$

▷ *Exercice 2.49 :* Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On note f l'application de E dans E dont le graphe Γ est le suivant :

$$\Gamma = \{(1,2), (2,3), (3,3), (4,1)\}$$

Parmi les assertions suivantes, cochez celles qui sont vraies.

1. ☐ L'application f est surjective.
2. ☐ $f(\{2,3\})$ est un singleton.
3. ☐ $f^{-1}(\{2,3\})$ est un singleton.
4. ☐ L'image réciproque par f de tout singleton est non vide.
5. ☐ 4 n'a pas d'antécédent pour f.