# Formalisation mathématique

Tony Bourdier (2012)

## Table des matières



## 1 Logique de base

### 1.1 Implication, condition nécéssaire, condition suffisante

**Définition 1.1 :** Soient $A$ et $B$ deux propositions. On dit que $A$ **implique** $B$ et on note

$$A \Rightarrow B$$

pour dire que **si** $A$ est vraie, **alors** B est vraie.

**Remarque 1.2 :** Si $A \Rightarrow B$, on dit que $B$ est une **condition nécessaire** à $A$ et que $A$ est une **condition suffisante** à $B$.

## 1.2 Contraposée

**Définition 1.3 :** Si $A \Rightarrow B$, alors

$$non(B) \Rightarrow non(A)$$

autrement dit, puisque si $A$ est vraie, alors $B$ est nécessairement vraie, alors si $B$ est faux, c'est que $A$ est faux. $non(B) \Rightarrow non(A)$ est la **contraposée** de $A \Rightarrow B$.

> **Exemple 1.4 :** Soient les propositions $A =$ « il pleut » et $B =$ « je ne sors pas » (donc $non(A) =$ « il ne pleut pas » et $non(B) =$ « je sors »). On a $A \Rightarrow B$, autrement dit, s'il pleut, je ne sors pas. On peut donc dire avec certitude que si je sors, c'est qu'il ne pleut pas : $non(B) \Rightarrow non(A)$.

**Définition 1.5 :** On appelle **réciproque** de la proposition « $A \Rightarrow B$ » la proposition :

$$B \Rightarrow A$$

**Remarque 1.6 :** Il faut bien prendre garde à ne pas confondre une proposition avec sa réciproque.

## 1.3 Équivalence

**Définition 1.7 :** On dit que $A$ **est équivalent à** $B$ et l'on note

$$A \Leftrightarrow B$$

si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.

**Remarque 1.8 :** On utilise souvent la formulation suivante pour dire que $A \Leftrightarrow B$ :

« $A$ est vraie **si et seulement si** $B$ est vraie »

En effet :

« $A$ est vraie **si** $B$ est vraie » signifie $B \Rightarrow A$

et

« $A$ est vraie **seulement si** $B$ est vraie » signifie $A \Rightarrow B$

**Remarque 1.9 :** On dit que $B$ est une condition **nécessaire et suffisante** à $A$ (et de la même façon, $A$ est une condition nécéssaire et suffisante à $B$).

## 1.4 Exercices

▷ *Exercice 1.10 :* Soit $n$ un entier quelconque. Parmi les phrases suivantes, lesquelles traduisent correctement l'implication

$$(4 \mid n) \Rightarrow (2 \mid n)$$

1. ☐ Si 4 divise $n$ alors 2 divise $n$.
2. ☐ 2 divise $n$ seulement si 4 divise $n$.
3. ☐ Pour que 2 divise $n$, il faut que 4 divise $n$.
4. ☐ Pour que 2 divise $n$, il suffit que 4 divise $n$.
5. ☐ La condition « 2 divise $n$ » est nécessaire pour que 4 divise $n$.
6. ☐ La condition « 4 divise $n$ » est nécessaire pour que 2 divise $n$.
7. ☐ La condition « 4 divise $n$ » est suffisante pour que 2 divise $n$.
8. ☐ Il est nécessaire et suffisant que 4 divise $n$ pour que 2 divise $n$.
9. ☐ Si 2 ne divise pas $n$, alors 4 ne divise pas $n$.
10. ☐ Il est nécessaire que 4 ne divise pas $n$ pour que 2 ne divise pas $n$.
11. ☐ Il est suffisant que 2 ne divise pas $n$ pour que 4 ne divise pas $n$.
12. ☐ 4 ne divise pas $n$ si et seulement si 2 ne divise pas $n$.

# 2 Théorie naïve des ensembles

## 2.1 Ensembles, éléments

**Définition 2.1 :** Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments**. Chaque élément apparaît dans l'ensemble de façon **unique** et l'ordre d'apparition des éléments n'importe pas. Un ensemble est noté entre accolades.

> **Exemple 2.2 :** $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ est un ensemble. On peut également le noter : $\{5, 4, 3, 2, 1\}$ ou encore $\{1, 3, 2, 5, 4\}$. A noter que, par définition, un même élement ne peut pas apparaître plusieurs fois dans un ensemble. Ainsi : $\{1, 2, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

**Définition 2.3 :** Lorsqu'un élément $x$ **appartient** à un ensemble $E$, on note :

$$x \in E$$

Dans le cas contraire, on note $x \notin E$ (et on dit que $x$ n'appartient pas à $E$).

> **Exemple 2.4 :** Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, alors $1 \in E,\ 3 \in E$ mais $8 \notin E$.

**Définition 2.5 :** Deux ensembles sont **égaux** lorsqu'ils contiennent exactement les mêmes éléments.

**Remarque 2.6 :** Il y a plusieurs façons de représenter un ensemble. Lorsque cet ensemble est **fini** (*i.e.* contient un nombre fini d'éléments), on énumère généralement ses éléments (comme dans l'exemple précédent). En revanche, lorsque l'on ne peut pas lister les éléments de l'ensemble, on cherche une façon de décrire ces éléments.

> **Exemple 2.7 :** On veut définir l'ensemble $P$ comme étant l'ensemble contenant tous les nombres entiers pairs. Comme il en existe une infinité, on ne peut pas les énumérer. On note alors, par exemple, $P = \{x \text{ tels que } x \text{ soit un entier pair}\}$. On verra ultérieurement comment formaliser mathématiquement « $x$ tels que $x$ soit un entier pair ».

**Définition 2.8 :** On appelle **singleton** tout ensemble composé d'un seul élément.

> **Exemple 2.9 :** Les ensembles $E = \{1\}$, $F = \{2\}$ ou encore $G = \{a\}$ sont des singletons.

**Remarque 2.10 :** Il ne faut pas confondre un singleton avec l'élément qu'il contient.

> **Exemple 2.11 :** $E = \{3\}$ est un ensemble de réels (même s'il n'en contient qu'un) alors que 3 est un réel.

**Définition 2.12 :** On appelle **cardinal** d'un ensemble et on note *card* le nombre d'éléments que contient l'ensemble.

> **Exemple 2.13 :** Si $E = \{a, b, c, d\}$, $card(E) = 4$. Le cardinal d'un singleton est 1.

**Remarque 2.14 :** Il existe un unique ensemble de cardinal nul, *i.e.* ne contenant aucun élément : il s'agit de l'ensemble vide noté $\varnothing$.

## 2.2 Sous-ensembles

### 2.2.1 Inclusion

**Définition 2.15 :** Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On dit que $E$ est **inclus** dans $F$ et on note

$$E \subseteq F$$

si tous les éléments de $E$ appartiennent à $F$. On dit alors que $E$ est un **sous-ensemble** de $F$, ou encore une **partie** de $F$.

**Remarque 2.16 :** Dans certains ouvrages, le symbole $\subseteq$ est substitué par $\subset$.

> **Exemple 2.17 :** Si $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{a, b, c, d, e, f\}$, alors $E \subseteq F$.

**Remarque 2.18 :** par définition de l'égalité de deux ensembles, on a $E = F$ si et seulement si $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.

**Remarque 2.19 :** L'ensemble vide $\varnothing$ est inclus dans tous les ensembles. Soit un ensemble $E$ quelconque, on a toujours $\varnothing \subseteq E$.

### 2.2.2 Ensemble des parties

**Définition 2.20 :** Soit $E$ un ensemble. Les sous-ensembles (ou parties) de $E$ forment un ensemble appelé **ensemble des parties de E**, et noté $\mathcal{P}(E)$ :

$$\mathcal{P}(E) = \{F \mid F \subseteq E\}$$

**Remarque 2.21 :** $\mathcal{P}(E) = \{F \mid F \subseteq E\}$ se lit « $\mathcal{P}$(E) est l'ensemble des $F$ tels que $F$ soit inclus dans $E$ ».

**Remarque 2.22 :** Quelque soit l'ensemble $E$, on a toujours $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$. En effet, on a dit précédemment que $\varnothing \subseteq E$ et, naturellement, $E \subseteq E$.

> **Exemple 2.23 :** Soit $E = \{1, 2, 3\}$. On cherche alors à calculer $\mathcal{P}(E)$. On cherche méthodiquement les éléments qui composent $\mathcal{P}(E)$. On commence par les ensembles à 0 élément, puis 1, puis 2, ... :
> - à 0 élément : $\varnothing$
> - à 1 élément : $\{1\},\ \{2\},\ \{3\}$
> - à 2 éléments : $\{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\}$
> - à 3 éléments : $\{1, 2, 3\} = E$
>
> Donc $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\},\ E\}$.

**Proposition 2.24 :** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. On a :

$$card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

▷ **Démonstration :** *On cherche à former un sous-ensemble de E. Comment s'y prend-on ? On regarde le premier élément de E et l'on se dit « Le prends-je ou ne le prends-je pas ? ». On a donc* 2 *possibilités. On regarde ensuite le second éléments et on se pose la même question, on a donc de nouveau* 2 *possibilités. Au final, on aura* $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$ *possibilités.* ■

## 2.3 Opérations sur les ensembles

### 2.3.1 Union

**Définition 2.25 :** On appelle **union** (ou **réunion**) de deux ensembles $A$ et $B$ et l'on note

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A$ ou à $B$.

> **Exemple 2.26 :** Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 4, 5\}$ alors $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$.

**Remarque 2.27 :** Quelque soit l'ensemble $E$, on a $E \cup \varnothing = E$. On dit que $\varnothing$ est l'élément neutre de l'union.

**Remarque 2.28 :** $A \cup B$ se lit « $A$ union $B$ ».

**Remarque 2.29 :** Lorsque l'on veut désigner l'union de $n$ ensembles où $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

### 2.3.2 Intersection

**Définition 2.30 :** On appelle **intersection** de deux ensembles $A$ et $B$ et l'on note

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à $A$ et à $B$.

| **Exemple 2.31 :** Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 4, 5\}$ alors $A \cap B = \{2\}$.

**Remarque 2.32 :** Quelque soit l'ensemble $E$, on a $E \cap \varnothing = \varnothing$. On dit que $\varnothing$ est l'élément absorbant de l'intersection.

**Remarque 2.33 :** $A \cap B$ se lit « $A$ inter $B$ ».

**Remarque 2.34 :** Lorsque l'on veut désigner l'intersection de $n$ ensembles où $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

**Définition 2.35 :** On dit que deux ensembles $A$ et $B$ sont **disjoints** si

$$A \cap B = \varnothing$$

Autrement dit, s'il n'existe aucun élément commun à $A$ et à $B$.

### 2.3.3 Différence

**Définition 2.36 :** On appelle **différence** des ensembles $A$ et $B$ et l'on note

$$A \backslash B \quad \text{ou} \quad A - B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A$ mais pas à $B$.

**Remarque 2.37 :** $A \backslash B$ (ou $A - B$) se lit « $A$ privé de $B$ ».

| **Exemple 2.38 :** Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 4, 5\}$ alors $A \backslash B = \{1\}$.

**Remarque 2.39 :** On a les propriétés évidentes suivantes :
- $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$
- $A \backslash \varnothing = A$
- $A \backslash A = \varnothing$

### 2.3.4 Complémentaire

**Remarque 2.40 :** Lorsqu'on parle du complémentaire d'un ensemble, on sous-entend que l'on se place dans un « sur-ensemble » qui contient tous les éléments de l'étude. En début d'énoncé, vous devez voir une phrase de la forme « on se place dans $\mathbb{R}$ » ou « on se place dans $\mathbb{N}$ » ... On appelle généralement $\Omega$ cet ensemble de base et l'on parle parfois d'univers.

**Définition 2.41 :** On se place dans un ensemble $\Omega$. On appelle **complémentaire** d'un ensemble $A$ l'on note

$$\overline{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à $A$.

**Remarque 2.42 :** Voici deux formules connues sous le nom de loi de **De Morgan** :

$$\begin{cases} \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \\ \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \end{cases}$$

**Remarque 2.43 :** $A \backslash B = A \cap \overline{B}$

**Remarque 2.44 :** $\overline{A} = \Omega \backslash A$

> **Exemple 2.45 :** On se place dans $\mathbb{N}$. Soient les ensembles $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et $F = \{x \mid x \text{ entier positif pair}\}$. Alors, $\overline{E} = \{x \mid x > 3\} = \{4, 5, 6, 7, \ldots\}$ et $\overline{F} = \{x \mid x \text{ entier positif impair}\}$.

## 2.4 Application caractéristique (indicatrice)

On se place dans un ensemble $\Omega$ (ce qui signifie que tous les ensembles considérés dans cette partie seront des sous-ensembles de $\Omega$).

**Définition 2.46 :** On appelle **application caractéristique** ou **indicatrice** d'un ensemble $E$ et l'on note $\mathbb{1}_E$ l'application telle que :

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E \\ 0 \text{ si } x \notin E \end{cases}$$

**Remarque 2.47 :** La définition d'une application sera donneé dans un chapitre ultérieur.

**Remarque 2.48 :** On a les propriétés essentielles suivantes :
- $A = B$ si et seulement si pour tous les éléments $x$ de $\Omega$, $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$
- pour tout élément $x$ de $\Omega$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x).\mathbb{1}_B(x) = \min(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x))$
- pour tout élément $x$ de $\Omega$, $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)-\mathbb{1}_A(x).\mathbb{1}_B(x) = \max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x))$
- pour tout élément $x$ de $\Omega$, $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$
- pour tout élément $x$ de $\Omega$, $\mathbb{1}_{A\backslash B}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x).\mathbb{1}_B(x)$

## 2.5 Partition

**Définition 2.49 :** Soit $E$ un ensemble non vide. On appelle **partition** de $E$ tout sous-ensemble $P$ de $\mathcal{P}(E)$ tel que :
- tout élément de $P$ est non vide
- les éléments de $P$ sont deux à deux disjoints
- $\bigcup_{e \in P} e = E$, *i.e.* l'union de tous les élements de $P$ est égale à $E$

**Remarque 2.50 :** Si $E$ est un ensemble fini, alors on peut écrire $P$ de la façon suivante : $P = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ et on peut alors reformuler la définition de la façon suivante : $P$ est une partition de $E$ si :
- pour tout $i$ de 1 à $n$, $A_i \neq \varnothing$
- pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$

**Remarque 2.51 :** Une partition d'un ensemble $E$ est tout simplement un « découpage » de $E$ en plusieurs morceaux non vides et disjoints.

> **Exemple 2.52 :** Soit un $E = \{a, b, c, d, e\}$. L'ensemble $P = \big\{\{a, e\}, \{b\}, \{c, d\}\big\}$ est une partition de $E$.

## 2.6 Ensembles remarquables

Voici quelques ensembles bien connus :
- $\mathbb{R}$ : l'ensemble des réels ($1.25 \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$, $\frac{8}{3} \in \mathbb{R}$)
- $\mathbb{N}$ : l'ensemble des entiers naturels $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$
- $\mathbb{Z}$ : l'ensemble des entiers relatifs $(\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$
- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ : l'ensemble des booléens

## 2.7 Exercices

▷ *Exercice 2.53 :* On considère que notre univers est $\Omega$ (*i.e.* tous les ensembles considérés sont des sous-ensembles de $\Omega$). Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. ☐ $A \cap B$ est le plus grand ensemble contenu à la fois dans les ensembles $A$ et $B$.
2. ☐ $A \cap B$ est le plus petit ensemble contenu à la fois dans les ensembles $A$ et $B$.
3. ☐ $A \cup B$ est le plus grand ensemble contenant les éléments de $A$ et de $B$.
4. ☐ $A \cup B$ est le plus petit ensemble contenant les éléments de $A$ et de $B$.
5. ☐ $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = \Omega$
6. ☐ $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = A$
7. ☐ $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$
8. ☐ Soient $I \subseteq \mathbb{N}$ et $k \in I$, $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_k \subseteq \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)$
9. ☐ $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = A$

10. $\square$ $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \cup B = B$
11. $\square$ $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \cap B = A$
12. $\square$ $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \cap B = B$
13. $\square$ $A \subseteq B$ et $B \subseteq A \;\Rightarrow\; A = B$
14. $\square$ $\displaystyle\bigcup_{x \in A} \{x\} = \Omega$
15. $\square$ $\displaystyle\bigcup_{x \in A} \{x\} = A$
16. $\square$ $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
17. $\square$ $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$
18. $\square$ $A \cup \overline{A} = \Omega$
19. $\square$ $card(A \cap B) < card(A)$
20. $\square$ $card(A \cup B) \geq card(A)$
21. $\square$ $card(A \cup B) = card(A) \Leftrightarrow B \subseteq A$
22. $\square$ $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$
23. $\square$ $A \cap B = \varnothing \Rightarrow card(A \cup B) = card(A) + card(B)$
24. $\square$ $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow card(A \cup B) < card(A) + card(B)$

▷ *Exercice 2.54 :* Déterminez les ensembles suivants :

$$\bigcup_{A \in \mathcal{P}(E)} A \quad \text{et} \quad \bigcap_{A \in \mathcal{P}(E)} A$$

▷ *Exercice 2.55 :* Soit $B = \{0, 1\}$.

1. A-t-on $B \subseteq B$ ?
2. Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(B)$ ?
3. Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$ ?
4. Mêmes questions pour $B = \varnothing$.

# 3 Produit cartésien, $n$-uplets

## 3.1 $n$-uplets

Nous avons défini les ensembles comme étant des collections d'objets dans lesquelles l'ordre des éléments n'importe pas et où chaque élément apparaît de manière unique. Nous définissons désormais des collections d'objets tenant compte de l'ordre des éléments et où un éléments peut apparaître plusieurs fois.

**Définition 3.1 :** On appelle **couple** une collection de deux éléments notée

$$(a, b)$$

telle que $(a, b) = (c, d)$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.

**Remarque 3.2 :** Si $a \neq b$, $(a,b) \neq (b,a)$.

**Remarque 3.3 :** De la même façon, on peut définir les notions de triplets, de quadruplet, ..., de $n$-uplet.

**Définition 3.4 :** On appelle **$n$-uplet** une collection de $n$ éléments notée

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

telle que $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ si et seulement si $a_1 = b_1$ et $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$.

### 3.2 Produit cartésien

**Définition 3.5 :** Soient $E_1$ et $E_2$ deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de $E_1$ et de $E_2$ et l'on note $E_1 \times E_2$ l'ensemble des couples $(a_1, a_2)$ tels que $a_1$ soit un élément de $E_1$ et $a_2$ un élément de $E_2$ :

$$E_1 \times E_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in E_1 \text{ et } a_2 \in E_2\}$$

On définit de même le produit cartésien de $n$ ensembles $E_1$, ..., $E_n$ par :

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in E_1 \text{ et } a_2 \in E_2 \text{ et } \ldots \text{ et } a_n \in E_n\}$$

**Remarque 3.6 :** On écrit $E^n$ à la place de $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ occurences de } E}$

**Remarque 3.7 :** L'expression « Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ » est donc strictement équivalente à « Soient $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2, \ldots,$ $a_n \in E_n$ ».

> **Exemple 3.8 :** Soient $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ deux ensembles. Le produits cartésien $E \times F$ contient tous les couples suivants : $(a, 1)$, $(a, 2)$, $(a, 3)$, $(b, 1)$, $(b, 2)$, et $(b, 3)$.

**Remarque 3.9 :** Le produit cartésien d'un ensemble par l'ensemble vide est l'ensemble vide : $E \times \varnothing = \varnothing$.

## 4 Quantificateurs

### 4.1 Quel que soit

**Définition 4.1 :** On introduit un symbole très utilisé en mathématiques, le **quantificateur universel** $\forall$ qui se lit « quel que soit » ou « pour tout ».

**Remarque 4.2 :** On utilise ce quantificateur pour exprimer le fait qu'une propriété est vraie pour tous les éléments d'un ensemble donné.

**Exemple 4.3 :** La propriété

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

se lit « Pour tous les éléments de $x$ de $E$, la propriété $P(x)$ est vraie ». Par exemple, si on note $P(x)$ la propriété « $x$ est pair » et $E = \{2, 4, 10, 16, 28\}$ alors, on a effectivement $\forall x \in E,\ P(x)$, autrement dit, $2, 4, 10, 16$ et $28$ sont des nombres pairs.

**Remarque 4.4 :** Lorsque l'on doit démontrer une propriété de la forme : « $\forall x \in E,\ \ldots$ » la démonstration débutera par : « **Soit** $x \in E$ », autrement dit, en considérant un $x$ quelconque de $E$. Comme la propriété aura été démontrée pour un élément quelconque de $E$, elle sera valable pour tous les éléments de $E$.

## 4.2 Il existe

**Définition 4.5 :** On introduit un nouveau symbole également très utilisé en mathématiques, le **quantificateur existentiel** $\exists$ qui se lit « il existe ».

**Exemple 4.6 :** La propriété

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

se lit « Il existe au moins un élément $x$ de $E$ tel que $P(x)$ soit vraie » ou encore « On peut trouver un $x$ de $E$ (éventuellement plusieurs) qui vérifie $P(x)$ ».

**Remarque 4.7 :** « $\exists x \in E,\ P(x)$ » s'écrit également « $\exists x \in E\ ;\ P(x)$ » ou « $\exists x \in E\ :\ P(x)$ » ou encore « $\exists x \in E \mid P(x)$ ».

**Exemple 4.8 :** Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et soit $P(x)$ la propriété « $x$ est pair ». On s'apperçoit que la proposition « $\forall x,\ P(x)$ » et fausse mais que « $\exists x,\ P(x)$ » est vraie. En effet, 2, 4 et 6 sont pairs mais 1, 3 et 5 ne le sont pas.

**Définition 4.9 :** On introduit enfin un dernier quantificateur : $\exists!$ qui se lit « il existe un unique ».

**Remarque 4.10 :** Ce quantificateur est plus précis que le quantificateur existentiel. Il indique à la fois l'existence d'un élément mais également son unicité.

**Exemple 4.11 :** Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(x)$ la propriété « $x$ est pair » et $Q(x)$ la propriété « $x \geq 6$ ». On a alors :
- « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est fausse
- « $\forall x \in E,\ Q(x)$ » est fausse
- « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est vraie
- « $\exists x \in E,\ Q(x)$ » est vraie
- « $\exists! x \in E,\ P(x)$ » est fausse
- « $\exists! x \in E,\ Q(x)$ » est vraie

### 4.3 Quantification multiple

La formulation d'une propriété peut nécessiter l'utilisation de plusieurs quantificateurs. Par exemple :

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ \exists z \in G,\ P(x) \text{ et } R(y,z)$$

Si ces écritures vous sont peu familières, habituez-vous à les traduire en « français » : « Pour tous les éléments $x$ de $E$ et $y$ de $F$, on peut trouver au moins un $z$ dans $G$ tel que $P(x)$ et $R(y,z)$ soient vraies ».

**Remarque 4.12 :** On peut intervertir des quantificateurs de même nature se succédant dans une formule sans en changer le sens. Autrement dit :

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ \forall z \in G,\ \ldots$$

est équivalent à

$$\forall y \in F,\ \forall z \in G,\ \forall x \in E,\ \ldots$$

ou encore

$$\forall (x,y,z) \in E \times F \times G,\ \ldots$$

De la même façon :

$$\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ \exists z \in G,\ \ldots$$

est équivalent à

$$\exists y \in F,\ \exists z \in G,\ \exists x \in E,\ \ldots$$

ou encore

$$\exists (x,y,z) \in E \times F \times G,\ \ldots$$

**Remarque 4.13 :** En revanche, il est absolument interdit d'intervertir des quantificateurs différents :

$$\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ \ldots$$

n'est **pas** équivalent à

$$\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ \ldots$$

Dans le premier cas, pour tout $x$ de $E$, on peut trouver un $y$, mais ce $y$ peut être différent pour chaque $x$. Dans le second cas, on dit qu'il existe un $y$ qui correspond à tous les $x$. La seconde formule est donc un cas particulier de la première lorsque le $y$ est le même pour tous les $x$.

> **Exemple 4.14 :** Soient $E = \{1,3,5\}$ et $F = \{2,4,6\}$ deux ensembles et la propriété $\mathcal{P}(x,y)$ qui signifie « $y = x + 1$ ». On a :
>
> $$\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x,y)$$
>
> Ce qui se lit : « Pour tous les élements $x$ de $E$, on peut trouver un élément $y$ de $F$ tel que $y = x + 1$ ». En revanche, il est faux d'écrire :
>
> $$\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$$
>
> Ce qui signifie « Il existe un élément $y$ de $F$ qui vérifie pour tous les $x$ de $E$ : $y = x + 1$ ».

**Remarque 4.15 :** Ces quantificateurs offrent un pouvoir d'expression remarquable. Admettons que nous souhaitions définir l'ensemble $E$ comme étant l'ensemble des entiers naturels pairs. On pourrait écrire :

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N},\ x = 2 \times p\}$$

Ou encore, l'ensemble $F$ des entiers naturels multiples de 3 mais pas multiples de 9 :

$$F = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}, \nexists q \in \mathbb{N},\ x = 3 \times p,\ x = 9 \times q\}$$

## 4.4 Exercices

▷ *Exercice 4.16 :* Soit $R \subseteq \mathbb{N} \times \{a, b, c\} \times \mathbb{N}$ défini par

$$R = \{(0, a, 1), (2, a, 0), (1, b, 3), (3, b, 2), (3, a, 9), (0, b, 4)\}$$

1. Déterminez les ensembles suivants :
   - $(i)$ $\{x \in \{a, b, c\} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ (0, x, y) \in R\}$
   - $(ii)$ $card\big(\{(x, y, z) \in R \mid x \leq 1\}\big)$
   - $(iii)$ $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \{a, b, c\} \mid \exists z \in \mathbb{N},\ y = c\ \wedge\ (x, y, z) \in R\}$
2. Formalisez :
   - $(i)$ L'ensemble des triplets de $R$ contenant $b$.
   - $(ii)$ L'ensemble dont les éléments sont $(0, 1), (2, 0), (1, 3), (3, 2), (3, 9), (0, 4)$ (en fonction de $R$).
   - $(iii)$ L'ensemble des entiers intervenant dans un triplet de $R$ contenant 1.
3. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont exactes ?
   - $(i)$ ☐ $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists (y, z) \in \{a, b, c\} \times \mathbb{N},\ (x, y, z) \in R$
   - $(ii)$ ☐ $\forall (x, y) \in \mathbb{N} \times \{a, b, c\},\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{N},\ \big((x, y, z_1) \in R\ \wedge\ (x, y, z_2) \in R\big) \Rightarrow z_1 = z_2$
   - $(iii)$ ☐ $\forall y \in \{a, b, c\},\ \exists (x, z) \in \mathbb{N}^2,\ (x, y, z) \in R \cup \{(2, c, 5)\}$
   - $(iv)$ ☐ $\exists (x, z) \in \mathbb{N}^2,\ \forall y \in \{a, b, c\},\ (x, y, z) \in R \cup \{(2, c, 5)\}$
   - $(v)$ ☐ $\forall E \in \mathcal{P}(R),\ E \neq \varnothing \Rightarrow \exists \alpha \in R,\ \alpha \in E$