Tests Statistiques

Tony Bourdier – ESSTIN 2009-2010

1 Formulation

1.1 Notion de test

Soit X une variable aléatoire réelle de densité $f_\theta(x)$ dépendant d'un paramètre θ de valeur inconnue. On formule deux hypothèses sur la valeur de θ :

$$\begin{cases} H_0 : \text{l'hypothèse nulle} \\ H_1 : \text{l'hypothèse alternative} \end{cases}$$

Chacune de ces hypothèses peut être simple : $\theta = \theta_0$ (θ a la valeur θ_0) ou multiple : $\theta \in \Theta$
L'une de ces hypothèses est vraie. Un test est une règle de choix entre les deux hypothèses qui est obtenue à partir de l'observation d'un échantillon i.i.d. de X.

1.2 Règles de décisions

1.2.1 Décisions possibles

La règle conduit à l'une des deux décisions suivantes :

1. rejeter l'hypothèse H_0 (= accepter H_1)
2. ne pas rejeter l'hypothèse H_0 (= accepter H_0)

1.2.2 Erreurs de décision et risque d'erreurs

Décision / Hypothèse vraie	Ne pas rejeter H_0	Rejeter H_0
H_0	Pas d'erreur $1-\alpha$	Erreur de 1^{ere} espèce α
H_1	Erreur de 2^e espèce β	Pas d'erreur $\Pi = 1-\beta$

Soit le test $\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases}$

☞ **Définition 1.1 :** On définit :

1. La fonction risque de $1^{\text{ère}}$ espèce :
   Pour $x \in \Theta_0$: $\alpha(x) = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 \text{ lorsque } \theta = x)$.
   $\sup_{x\in\Theta_0} \alpha(x) = \alpha$: seuil ou risque du test
2. La fonction risque de 2^{nde} espèce :
   Pour $x \in \Theta_1$: $\beta(x) = \mathbb{P}(\text{ne pas rejeter } H_0 \text{ lorsque } \theta = x)$
3. La fonction puissance :
   Pour $x \in \Theta_1$: $\Pi(x) = 1 - \beta(x) = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 \text{ lorsque } \theta = x)$

1.2.3 Méthode de test de Neyman et Pearson

On cherche à déterminer la règle de décision de telle manière que les risques d'erreur soient minimaux.
Or, en général, les risques de première et deuxième espèce sont antagonistes : si on diminue l'un, on augmente l'autre.

✎ **La méthode de Neyman et Pearson** consiste à :
– fixer le seuil (risque) $\alpha = \sup_{x\in\Theta_0} \alpha(x)$
– minimiser $\beta(x)$ (= maximiser $\Pi(x)$: c'est le critère de la puissance maximale)

La valeur de α étant fixée (petite), l'hypothèse H_0 est privilégiée : c'est celle que l'on ne veut pas rejeter à tort.

2 Théorème de Neyman

☞ **Définition 2.2 :** Le test $\left\{\begin{array}{l} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{array}\right.$ est dit sans biais lorsque

$$\forall x \in \Theta_0,\ \alpha(x) \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \Theta_1,\ \Pi(x) \geq \alpha$$

Théorème 2.1 : (de Neyman) On considère le test $\left\{\begin{array}{l} H_0 : \theta \in \theta_0 \\ H_1 : \theta \in \theta_1 \end{array}\right.$.
Si X admet une densité de probabilité $f_\theta(x) > 0$ pour tout x, alors, pour tout $\alpha \in [0,1]$, il existe un test de puissance maximale de H_0 contre H_1 défini par la région d'acceptation de l'hypothèse H_0 : ✍

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n; L_{\theta_1}(x) \leq c(\alpha).L_{\theta_0}(x)\}$$

avec $c(\alpha) > 0$ et tel que $\mathbb{P}_{\theta_0}(A_\alpha) = 1 - \alpha$.
En outre, ce test est sans biais.

3 Test sur la moyenne d'une loi normale d'écart-type connu

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, σ connu.

3.1 Tests entre hypothèses simples

Soit le test $\left\{\begin{array}{l} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m = m_1 \end{array}\right.$
$(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon i.i.d.de X. On applique le théorème de Neyman :

Région d'acceptation de H_0 :

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n; L_{m_1}(x) \leq c(\alpha).L_{m_0}(x)\}$$

Règle de décision : Si $(x_1, ..., x_n) \notin A_\alpha$, on rejette H_0, sinon, on accepte H_0.

$$L_m(x) = \prod_{i=1}^n f_m(x_i) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{L_{m_1}(x)}{L_{m_0}(x)} &= \frac{exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-m_1}{\sigma}\right)^2\right)}{exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-m_0}{\sigma}\right)^2\right)} \\
&= exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n \left((x_i - m_1)^2 - (x_i - m_0)^2\right)\right) \\
&= exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (m_0 - m_1)(2x_i - m_0 - m_1)\right) \\
&= exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(m_0 - m_1)2n(\overline{x} - \tfrac{1}{2}(m_0 + m_1))\right) \\
&\leq c(\alpha) \text{ pour définir la région d'acceptation}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sigma^2}(m_0 - m_1)n(\overline{x} - \frac{1}{2}(m_0 + m_1)) \leq ln\,(c(\alpha)) \tag{1}$$

<u>1^{er} cas</u> : $m_1 > m_0$

$$\begin{aligned}(1) \Leftrightarrow \overline{x} - \frac{1}{2}(m_0 + m_1) &\leq \frac{\sigma^2}{n(m_1 - m_0)} ln\,(c(\alpha)) \\ \Leftrightarrow \overline{x} \leq \frac{\sigma^2}{n(m_1 - m_0)} ln\,(c(\alpha)) &+ \frac{1}{2}(m_0 + m_1) = d(\alpha)\end{aligned}$$

La région d'acceptation de H_0 est de la forme :

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n ; x \leq d(\alpha)\}$$

Déterminons $d(\alpha)$.
Le seuil α est fixé :

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 \text{ lorsque } H_0 \text{ est vraie}) = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 \text{ lorsque } m = m_0) = \mathbb{P}_{m_0}(\overline{A_\alpha})$$

$\mathbb{P}\left(\overline{X} > d(\alpha) \text{ lorsque } m = m_0\right) = \alpha$
Or, $(m = m_0) \Rightarrow \left(\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(m_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right)$
On se ramène donc à la loi normale centrée réduite :

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{d(\alpha) - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{d(\alpha) - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = u(\alpha)$
d'où $d(\alpha) = m_0 + u(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

<u>Conclusion</u> :

$$\begin{cases} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m = m_1 \end{cases} \qquad m_1 > m_0$$

✎

<u>Règle de décision</u> :

Si $\overline{x} > m_0 + u(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, on rejette H_0,
sinon, on ne rejette pas H_0.

<u>Remarque</u> : Cette règle de décision ne fait pas intervenir[1] la valeur de m_1.

<u>2^{nd} cas</u> : $m_1 < m_0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\sigma^2}(m_0 - m_1)n \leq 0$
On a donc

$$\begin{aligned}(1) \Leftrightarrow \overline{x} - \tfrac{1}{2}(m_0 + m_1) &\geq \frac{\sigma^2}{n(m_1 - m_0)} ln\,(c(\alpha)) \\ \Leftrightarrow \overline{x} \geq \frac{\sigma^2}{n(m_1 - m_0)} ln\,(c(\alpha)) &+ \tfrac{1}{2}(m_0 + m_1) = e(\alpha)\end{aligned}$$

[1]Sauf dans l'inégalité $m_1 > m_0$

$\Rightarrow A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n ; \overline{x} \geq e(\alpha)\}$ région d'acceptation de H_0.
On détermine alors $e(\alpha)$: $\alpha = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 \text{ lorsque } H_0 \text{ vraie}) = \mathbb{P}_{m_0}(\overline{A_\alpha})$
$\alpha = \mathbb{P}\left(\overline{X} < e(\alpha) \text{ lorsque } m = m_0\right)$

Or $(m = m_0) \Rightarrow \left(\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(m_0, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right)$
On se ramène donc à la loi normale centrée réduite :

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{e(\alpha) - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{e(\alpha) - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -u(\alpha) \Leftrightarrow e(\alpha) = m_0 - u(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Conclusion :
$\begin{cases} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m = m_1 \end{cases} \qquad m_1 < m_0$

✎ Règle de décision :

Si $\overline{x} < m_0 - u(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, on rejette H_0,
sinon, on ne rejette pas H_0.

3.2 Test unilatéral à droite

$\begin{cases} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m > m_0 \end{cases} \qquad \text{au seuil } \alpha$

Soit $m_1 > m_0$. La règle de décision du test $\begin{cases} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m = m_1 \end{cases}$ ne dépend pas de m_1. On va donc la prendre pour règle de décision du test unilatéral à droite. (C'est le test le plus puissant de seuil α par Neyman)

✎ Règle de décision :

Si $\overline{x} > m_0 + u(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, on rejette H_0,
sinon, on ne rejette pas H_0.

☞ **Définition 3.3 :** On dit que le test unilatéral à droite est uniformément le plus puissant de seuil α (UMP).

Fonction puissance :
Pour $m_1 > m_0$:

$$\Pi(m_1) = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 \text{ lorsque } m = m_1) = \mathbb{P}_{m_1}(\overline{A_\alpha})$$

$\Pi(m_1) = \mathbb{P}\left(\overline{X} > m_0 + u(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ lorsque } m = m_1\right)$

Or $(m = m_1) \Rightarrow \left(\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(m_1, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right)$
On se ramène donc à la loi normale centrée réduite :

$$\Pi(m_1) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{m_0 - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + u(\alpha)\right)$$

On pose $\dfrac{m_0 - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \lambda < 0 \qquad (m_1 > m_0)$

$$\text{Donc} \qquad \Pi(m_1) = \Pi_1(\lambda) = 1 - \Phi\left(\lambda + u(\alpha)\right) = \Phi\left(-\lambda - u(\alpha)\right)$$

où Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarque : Soit le test $\begin{cases} H_0 : m \leq m_0 \\ H_1 : m > m_0 \end{cases}$ au seuil α

Soit $m_2 \leq m_0$, on a la fonction risque de $1^{\text{ère}}$ espèce :

$$\alpha(m_2) = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 \text{ lorsque } m = m_2) = \mathbb{P}\left(\overline{X} > m_0 + u(\alpha)\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ lorsque } m = m_2\right)$$

Or $(m = m_2) \Rightarrow \left(\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(m_2, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right)$

On se ramène donc à la loi normale centrée réduite :

$$\alpha(m_2) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - m_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \underbrace{\frac{m_0 - m_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + u(\alpha)}_{\geq u(\alpha) \text{ car } m_2 \leq m_0}\right) \leq \alpha$$

$\Rightarrow$ Ce test est UMP de seuil α.

3.3 Test unilatéral à gauche

Soit le test $\begin{cases} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m < m_0 \end{cases}$ au seuil α

On utilise la règle de décision lorsque $m_1 < m_0$, donc la règle de décision du test UMP est :

✎

Règle de décision :

Si $\overline{x} < m_0 - u(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, on rejette H_0,
sinon, on ne rejette pas H_0.

Fonction puissance :

Pour $m_1 < m_0$:

$$\Pi(m_1) = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 \text{ lorsque } m = m_1) = \mathbb{P}_{m_1}(\overline{A_\alpha})$$

$\Pi(m_1) = \mathbb{P}\left(\overline{X} < m_0 - u(\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ lorsque } m = m_1\right)$

On se ramène donc à la loi normale centrée réduite :

$$\Pi(m_1) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{m_0 - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - u(\alpha)\right)$$

On pose $\dfrac{m_0 - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \lambda > 0 \qquad (m_1 < m_0)$

$$\text{Donc} \qquad \Pi(m_1) = \Pi_2(\lambda) = \Phi\left(\lambda - u(\alpha)\right)$$

3.4 Test bilatéral

Soit le test $\left\{\begin{array}{l} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m \neq m_0 \end{array}\right.$ au seuil α

Il paraît naturel de prendre la règle de décision suivante :

✎ Règle de décision :

$$\text{Si } \overline{x} < m_0 - u\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ou } \overline{x} > m_0 + u\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ on rejette } H_0,$$
$$\text{sinon } \left(m_0 - u\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{x} < m_0 + u\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ on ne rejette pas } H_0.$$

Théorème 3.2 : Ce test est UMP dans la classe des tests sans biais.

Fonction puissance :

Pour $m_1 \neq m_0$:

$$\begin{aligned} \Pi(m_1) &= \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 \text{ lorsque } m = m_1) \\ &= \mathbb{P}\left(\overline{X} < m_0 - u\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ou } \overline{X} > m_0 + u\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ lorsque } m = m_1\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Pi(m_1) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{m_0 - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - u\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{m_0 - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + u\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right)$$

On pose $\lambda = \dfrac{m_0 - m_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, on a alors :

$\Pi(m_1) = \Phi\left(\lambda - u\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right) + 1 - \Phi\left(\lambda + u\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right)$

$\Pi(m_1) = \Pi_3(\lambda) = \Phi\left(\lambda - u\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right) + \Phi\left(-\lambda - u\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right), \qquad \lambda \neq 0$

3.5 Cas d'une loi non normale

Pour n grand, $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(m, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. On peut donc dans ce cas reconstruire les mêmes tests que dans le cas d'une loi normale (ne nécessite pas la connaissance de la loi de X). Si on connaît la loi de X, alors on utilise le théorème de Neyman.

4 Autres tests usuels

4.1 Test sur la moyenne d'une loi normale d'écart-type inconnu

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ avec σ inconnu

4.1.1 Test unilatéral à droite

Soit le test $\left\{\begin{array}{l} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m > m_0 \end{array}\right.$ au seuil α

La région d'acceptation de H_0 est : $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n ; \overline{x} \leq d(\alpha)\}$

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 \text{ lorsque } m = m_0) = \mathbb{P}\left(\overline{X} > d(\alpha) \text{ lorsque } m = m_0\right)$$

Or, $(m = m_0) \Rightarrow \left(\dfrac{\overline{X} - m_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \sim \mathcal{T}_{n-1}\right)$ (ne fait pas intervenir σ mais seulement l'écart-type sur l'échantillon)

$$\alpha = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X}-m_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}}_{\mathcal{T}_{n-1}} > \underbrace{\frac{d(\alpha)-m_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}}_{t_{n-1}(\alpha)}\Bigg)$$

Donc $d(\alpha) = m_0 + t_{n-1}(\alpha)\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}$

✎

Règle de décision :

$$\text{Si } \overline{x} > m_0 + t_{n-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{n-1}}, \text{ on rejette } H_0,$$
$$\text{sinon, on ne rejette pas } H_0.$$

Fonction puissance :
Pour $m_1 > m_0$:

$$\Pi(m_1) = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 \text{ lorsque } m = m_1) = \mathbb{P}\left(\overline{X} > m_0 + t_{n-1}(\alpha)\frac{S}{\sqrt{n-1}} \text{ lorsque } m = m_1\right)$$

On a construit, pour α et n fixés, le graphe de la fonction $\beta = 1 - \Pi$ exprimée en fonction de $\lambda = \dfrac{m_1 - m_0}{\sigma}$ (courbe d'efficacité).

4.1.2 Test unilatéral à gauche

Soit le test $\left\{\begin{array}{l} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m < m_0 \end{array}\right.$ au seuil α

✎

Règle de décision :

$$\text{Si } \overline{x} < m_0 - t_{n-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{n-1}}, \text{ on rejette } H_0,$$
$$\text{sinon, on ne rejette pas } H_0.$$

4.1.3 Test bilatéral

Soit le test $\left\{\begin{array}{l} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m \neq m_0 \end{array}\right.$ au seuil α

✎

Règle de décision :

$$\text{Si } \overline{x} \notin \left[m_0 - t_{n-1}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{s}{\sqrt{n-1}} ; m_0 + t_{n-1}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right], \text{ on rejette } H_0,$$
$$\text{sinon, on ne rejette pas } H_0.$$

Fonction puissance :

$$\begin{aligned}\Pi(m_1) = \mathbb{P}&\left(\overline{X} < m_0 - t_{n-1}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n-1}} \text{ lorsque } m = m_1\right)\\ &+\mathbb{P}\left(\overline{X} > m_0 + t_{n-1}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n-1}} \text{ lorsque } m = m_1\right)\end{aligned}$$

On a construit, pour α et n fixés, le graphe de la fonction $\beta = 1 - \Pi$ exprimée en fonction de $\lambda = \dfrac{\mid m_1 - m_0 \mid}{\sigma}$.

4.1.4 Cas d'une loi non normale

On a, pour n grand, $\dfrac{\overline{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Donc, pour n grand, on a les mêmes règles de décisions que dans le cas d'une loi normale à condition de remplacer t_{n-1} par u.

4.2 Tests sur la variance d'une loi normale de moyenne inconnue

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, m inconnue

4.2.1 Test unilatéral à droite

Soit le test $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$ au seuil α
Estimateur de σ^2 : $\dfrac{n}{n-1} S^2$.

Remarque : Si m était connue, on utiliserait $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$

Région d'acceptation de H_0 :

$$A_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; s^2 \leq d(\alpha) \right\}$$

$\alpha = \mathbb{P}\left(s^2 > d(\alpha) \text{ lorsque } \sigma^2 = \sigma_0^2\right)$
Or, $(\sigma^2 = \sigma_0^2) \Rightarrow \left(\dfrac{nS^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}\right)$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{nS^2}{\sigma_0^2}}_{\chi^2_{n-1}} > \underbrace{\frac{nd(\alpha)}{\sigma_0^2}}_{a_{n-1}(\alpha)}\right)$$

Donc $d(\alpha) = a_{n-1}(\alpha) \dfrac{\sigma_0^2}{n}$

✎

Règle de décision :

Si $s^2 > \sigma_0^2 \dfrac{a_{n-1}(\alpha)}{n}$, on rejette H_0,
sinon, on ne rejette pas H_0.

Fonction puissance :

$$\Pi(\sigma_1^2) = \mathbb{P}\left(S^2 > \sigma_0^2 \frac{a_{n-1}(\alpha)}{n} \text{ lorsque } \sigma^2 = \sigma_1^2\right)$$

Or, $(\sigma^2 = \sigma_1^2) \Rightarrow \left(\dfrac{nS^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n-1}\right)$, donc $\Pi(\sigma_1^2) = \mathbb{P}\left(\dfrac{nS^2}{\sigma_1^2} > \dfrac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} a_{n-1}(\alpha)\right)$
On pose $\lambda = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_0}$:
$\Pi(\sigma_1^2) = \Pi_1(\lambda) = \mathbb{P}\left(\dfrac{nS^2}{\sigma_1^2} > \dfrac{a_{n-1}(\alpha)}{\lambda^2}\right)$
On a construit, pour α et n fixés, le graphe de $\beta_1(\lambda) = 1 - \Pi_1(\lambda)$ (courbe d'efficacité).

4.3 Tests sur une proportion

4.3.1 Test unilatéral à droite

Soit le test $\left\{ \begin{array}{l} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{array} \right.$ au seuil α

Estimateur de p : $\dfrac{k}{n}$

Région d'acceptation de H_0 :

$$A_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; \tfrac{k}{n} \leq d(\alpha) \right\}$$

$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{k}{n} > d(\alpha) \text{ lorsque } p = p_0 \right)$

Pour n grand : $(p = p_0) \Rightarrow \left(\dfrac{k}{n} \sim \mathcal{N}\left(p_0, \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}} \right) \right)$

On centre et on réduit :

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{\frac{k}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}}_{\mathcal{N}(0,1)} > \underbrace{\frac{d(\alpha) - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}}_{u(\alpha)} \right)$$

$d(\alpha) = p_0 + u(\alpha)\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$

✎ Règle de décision :

Si $\dfrac{k}{n} > p_0 + u(\alpha)\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$, on rejette H_0,
sinon, on ne rejette pas H_0.

Fonction puissance :

$$\Pi(p_1) = \mathbb{P}\left(\frac{k}{n} > p_0 + u(\alpha)\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \text{ lorsque } p = p_1 \right) \qquad p_1 > p_0$$

Or $(p = p_1) \Rightarrow \left(\dfrac{k}{n} \sim \mathcal{N}\left(p_1, \sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n}} \right) \right)$

$\Pi(p_1) = \mathbb{P}\left(\dfrac{\frac{k}{n} - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} > \dfrac{p_0 - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} + u(\alpha)\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{p_1(1-p_1)}} \right)$

$\Pi(p_1) = 1 - \Phi\left(\dfrac{p_0 - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} + u(\alpha)\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{p_1(1-p_1)}} \right) = \Phi\left(\dfrac{p_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} - u(\alpha)\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{p_1(1-p_1)}} \right)$