École Supérieure d'Informatique et Applications de Lorraine – 1ère année
Responsable : Tony Bourdier
Intervenants : Francis Alexandre, Tony Bourdier, Jean-François Scheid
Dates : du 9 septembre au 19 septembre 2008
Durée : 32 heures

Programme - Mathématiques Générales

Présentation : Si, comme Kleene, Church ou Gödel, on peut envisager l'informatique comme une branche des mathématiques, on peut également la voir comme une discipline fournissant les ressources permettant de simuler des problèmes et de calculer des solutions dont on rêvait à peine il y a seulement quelques dizaines d'années. La logique, l'intelligence articificielle, l'imagerie numérique, la cryptographie, la théorie des langages ou des graphes sont autant d'exemples qui illustrent non seulement la complémentarité de ces deux disciplines mais également leur liaison intrinsèque. Dans ce contexte, ce module a pour objectif de fournir les bases à la plupart des enseignements scientifiques.
Objectifs : Acquérir les bases mathématiques nécessaires à la plupart des enseignements scientifiques (mathématiques discrètes, mathématiques numériques, analyse de données, probabilités, traitement du signal, codes correcteurs d'erreurs, ...), savoir comprendre et formaliser un problème écrit sous forme mathématique.

Partie I

I. Formalisation mathématique *(/* 3 heures */)*

1) Logique (condition nécessaire, suffisante, contraposée, réciproque, équivalence)
2) Théorie des ensembles (ensembles, parties, opérations sur les ensembles, partitions)
3) Produit cartésien, n-uplet
4) Quantificateurs

II. Relations, fonctions, applications *(/* 2 heures */)*

1.- Relations

1) Définitions, représentation sagittale
2) Relation réciproque, image et image réciproque d'une partie
3) Restriction, prolongement, égalité
4) Opérations ensemblistes
5) Composition
6) Propriétés
7) Relations d'équivalence, relations d'ordre

2.- Fonctions, applications

1) Définitions
2) Injection, surjection, bijection
3) Applications remarquables

III. Raisonnement par récurrence

/ 1 heure */*

1) Récurrence simple
2) Récurrence d'ordre k
3) Récurrence forte

IV. Arithmétique

/ 2 heures */*

V. Structures

/ 4 heures */*

1.- Structures algébriques usuelles

1) Loi de composition interne
2) Groupe, soustraction, sous-groupe, produit de groupes, groupes finis
3) Morphisme
4) Anneaux, éléments neutres d'un anneau, diviseurs de zéro, produit d'anneaux
5) Corps

2.- Espaces vectoriels

1) Espace vectoriel réel : définition, vecteurs, scalaires, sous-espace vectoriel
2) Combinaison linéaire de vecteurs : définition, famille génératrice, famille libre, famille liée, rang d'une famille de vecteurs
3) Espace vectoriel de dimension finie : base d'un espace vectoriel, coordonnées d'un vecteur dans une base, dimension d'un espace vectoriel = rang de sa base
4) Somme de sous-espaces : définition, somme directe, sous-espaces supplémentaires

VI. Nombres complexes

/ 2 heures */*

1) Définition des nombres complexes $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Opérations sur $\mathbb{C}$. Notation $a + ib$ où $i^2 = -1$.
2) Nombre conjugué d'un nombre complexe. Module et argument d'un nombre complexe. Forme trigonométrique. Notation exponentielle $\rho e^{i\theta}$.
3) Interprétation géométrique d'un nombre complexe. Formule de Moivre. Racine n^{ième} d'un nombre complexe.

VII. Dérivation

/ 2 heures */*

1) Dérivation d'une fonction d'une variable réelle.
2) Notations de Landau (grand O et petit o) et "algèbre" associée.
3) Formules de Taylor (Taylor Mac-Young, Taylor-Lagrange),
4) Développements limités ; exemples usuels ($\dfrac{1}{(1+x)}$, $(1+x)^a$, $\exp(x)$, $\ln(1+x)$, sin, arcsin, $\cdots$).

Partie II

VIII. Algèbre linéaire *(/* 8 heures */)*

1.- Applications linéaires

1) Définition (homomorphisme)
2) Image, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme
3) Propriétés : $\forall f \in \mathcal{L}(E, F),\ f(0_E) = 0_F$, $\forall A$ sev de E, $f(A)$ sev de F, ...
4) Noyau, rang
5) Caractérisation des injections, surjections, bijections
6) Théorème du rang
7) Projecteurs

2.- Calcul matriciel

1) Matrices et applications linéaires
2) Opérations sur les matrices : égalité, addition, multiplication par un scalaire, multiplication de matrices, transposée
3) Matrices carrés : matrice identité, matrices diagonales, trace, cofacteur, comatrice, déterminant, matrice inversible
4) Changement de base
5) Réduction des endomorphismes : vecteur propre, valeurs propres, spectre, diagonalisation, théorème de Cayley-Hamilton, polynôme minimal

3.- Équations linéaires

1) Systèmes homogènes
2) Systèmes de Cramer
3) Méthode de Gauss

4.- Espaces euclidiens

1) Produit scalaire, norme, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski
2) Orthogonalité, théorème de Pythagore
3) Base orthonormale, projection orthogonale

IX. Suites, séries *(/* 2 heures */)*

1.- Suites de nombres réels

1) Suite monotone, suite bornée ; définition de la convergence (avec des ε).
2) Suite extraite, théorème de Bolzano-Weierstrass.
3) Théorèmes de convergence : Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente ; théorème des gendarmes (si (u_n) et (v_n) convergent vers la mà$^{\text{a}}$me limite l et si $u_n \leq w_n \leq v_n\ \forall n$, alors (w_n) converge vers l).
4) Quelques exemples fondamentaux : suites arithmétiques et géométriques, somme des n premiers entiers, somme des n premiers carrés, somme géométrique.
5) Suites adjacentes

2.- Séries de nombres réels

1) Définition, condition nécessaire de convergence ($\sum_n u_n < \infty \Rightarrow u_n \to 0$), théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

2) Série géométrique, série harmonique, séries de Riemann $(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha})$.
3) Règle de d'Alembert $(\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n)$, règle de Cauchy $(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n})$, règle de Riemann $(\lim_{n\to\infty} n^a u_n)$.

X. Intégration

/ 3 heures */*

1) Intégrale simple : intégrale de fonctions continue par morceaux sur un intervalle fermé borné. Propriétés (linéarité, croissance, relation de Chasles, inégalités,...)
2) Approximation par somme de Riemann.
3) Intégrale et primitives.
4) Intégration par parties, changement de variables.
5) Intégrale généralisée (intervalle d'intégration non borné, fonction non bornée) ; intégrales de Riemann $\int \frac{dx}{x^\alpha}$.

XI. Transformée de Fourier

/ 3 heures */*

1.- Séries de Fourier

1) Coefficients de Fourier et série de Fourier d'une fonction périodique continue (par morceaux).
2) Formule de Parseval.
3) Convergences : théorème de Dirichlet (f périodique, continue par morceaux et C^1 par morceaux $\Rightarrow$ la série de Fourier de f converge ponctuellement vers la moyenne des valeurs de f à gauche et à droite) ; phénomènes de Gibbs.

2.- Transformée de Fourier

1) Définition de la transformée de Fourier pour des fonctions continues par morceaux, absolument intégrables sur $\mathbb{R}$. Transformée de Fourier inverse.
2) Exemples : fonction "step", fonctions exponentielles ($e^{-a|x|}$, $e^{-a^2x^2}$), $\cdots$
3) Transformée de Fourier discrète (TFD) ; lien avec les coefficients de Fourier.