Mathématiques Générales

de l'IUT, BTS, L3 à l'école d'ingénieurs

Livret pédagogique

Tony Bourdier tony.bourdier@loria.fr
Jean-François Scheid scheid@iecn.u-nancy.fr

Version 4.0

Table des matières

Notations et abréviations

- *i.e.* : c'est-à-dire (*i.e.* est l'abréviation de l'expression latine « id est »)
- càd : c'est-à-dire
- ssi : si et seulement si
- $\Rightarrow$: implique
- $\Leftarrow$: est impliqué par
- $\Leftrightarrow$: est équivalent à
- $\wedge$: et
- $\vee$: ou
- $\forall$: pour tout
- $\exists$: il existe
- $\nexists$: il n'existe pas
- $\neg$: non
- $=$: est égal à
- $\in$: appartient à
- $\notin$: n'appartient pas à
- $\subseteq$: est inclus dans
- $\cup$: union
- $\cap$: intersection
- $\setminus$: privé de
- $\rightarrow$: de ... vers ...
- $\mapsto$: qui à ... associe ...
- $\sum_{i=1}^{n}$: somme pour i variant de 1 à n
- $\sum_{x \in E}$: somme sur les éléments de E
- $\prod_{i=1}^{n}$: produit pour i variant de 1 à n
- $\prod_{x \in E}$: produit sur les éléments de E
- $\{x \mid \ldots\}$: l'ensemble des x tels que ...
- $\{x \,;\, \ldots\}$: l'ensemble des x tels que ...
- $\{x \,,\, \ldots\}$: l'ensemble des x tels que ...

Première partie
Formalisation mathématique

1 Logique de base

1.1 Implication, condition nécéssaire, condition suffisante

Définition 1.1 : Soient A et B deux propositions. On dit que A **implique** B et on note

$$A \Rightarrow B$$

pour dire que **si** A est vraie, **alors** B est vraie.

Remarque 1.2 : Si $A \Rightarrow B$, on dit que B est une **condition nécessaire** à A et que A est une **condition suffisante** à B.

1.2 Contraposée

Définition 1.3 : Si $A \Rightarrow B$, alors

$$non(B) \Rightarrow non(A)$$

autrement dit, puisque si A est vraie, alors B est nécessairement vraie, alors si B est faux, c'est que A est faux. $non(B) \Rightarrow non(A)$ est la **contraposée** de $A \Rightarrow B$.

> **Exemple 1.4 :** Soient les propositions $A =$ « il pleut » et $B =$ « je ne sors pas » (donc $non(A) =$ « il ne pleut pas » et $non(B) =$ « je sors »). On a $A \Rightarrow B$, autrement dit, s'il pleut, je ne sors pas. On peut donc dire avec certitude que si je sors, c'est qu'il ne pleut pas : $non(B) \Rightarrow non(A)$.

Définition 1.5 : On appelle **réciproque** de la proposition « $A \Rightarrow B$ » la proposition :

$$B \Rightarrow A$$

Remarque 1.6 : Il faut bien prendre garde à ne pas confondre une proposition avec sa réciproque.

1.3 Équivalence

Définition 1.7 : On dit que A **est équivalent à** B et l'on note

$$A \Leftrightarrow B$$

si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.

Remarque 1.8 : On utilise souvent la formulation suivante pour dire que $A \Leftrightarrow B$:

« A est vraie **si et seulement si** B est vraie »

En effet :

$$\text{« } A \text{ est vraie } \textbf{si } B \text{ est vraie » signifie } B \Rightarrow A$$

et

$$\text{« } A \text{ est vraie } \textbf{seulement si } B \text{ est vraie » signifie } A \Rightarrow B$$

Remarque 1.9 : On dit que B est une condition **nécessaire et suffisante** à A (et de la même façon, A est une condition nécéssaire et suffisante à B).

1.4 Exercices

▷ *Exercice 1.10 :* Soit n un entier quelconque. Parmi les phrases suivantes, lesquelles traduisent correctement l'implication

$$(4 \mid n) \Rightarrow (2 \mid n)$$

1. ☐ Si 4 divise n alors 2 divise n.
2. ☐ 2 divise n seulement si 4 divise n.
3. ☐ Pour que 2 divise n, il faut que 4 divise n.
4. ☐ Pour que 2 divise n, il suffit que 4 divise n.
5. ☐ La condition « 2 divise n » est nécessaire pour que 4 divise n.
6. ☐ La condition « 4 divise n » est nécessaire pour que 2 divise n.
7. ☐ La condition « 4 divise n » est suffisante pour que 2 divise n.
8. ☐ Il est nécessaire et suffisant que 4 divise n pour que 2 divise n.
9. ☐ Si 2 ne divise pas n, alors 4 ne divise pas n.
10. ☐ Il est nécessaire que 4 ne divise pas n pour que 2 ne divise pas n.
11. ☐ Il est suffisant que 2 ne divise pas n pour que 4 ne divise pas n.
12. ☐ 4 ne divise pas n si et seulement si 2 ne divise pas n.

2 Théorie naïve des ensembles

2.1 Ensembles, éléments

Définition 2.1 : Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments**. Chaque élément apparaît dans l'ensemble de façon **unique** et l'ordre d'apparition des éléments n'importe pas. Un ensemble est noté entre accolades.

> **Exemple 2.2 :** $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ est un ensemble. On peut également le noter : $\{5, 4, 3, 2, 1\}$ ou encore $\{1, 3, 2, 5, 4\}$. A noter que, par définition, un même élement ne peut pas apparaître plusieurs fois dans un ensemble. Ainsi : $\{1, 2, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

Définition 2.3 : Lorsqu'un élément x **appartient** à un ensemble E, on note :

$$x \in E$$

Dans le cas contraire, on note $x \notin E$ (et on dit que x n'appartient pas à E).

Exemple 2.4 : Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, alors $1 \in E,\ 3 \in E$ mais $8 \notin E$.

Définition 2.5 : Deux ensembles sont **égaux** lorsqu'ils contiennent exactement les mêmes éléments.

Remarque 2.6 : Il y a plusieurs façons de représenter un ensemble. Lorsque cet ensemble est **fini** (*i.e.* contient un nombre fini d'éléments), on énumère généralement ses éléments (comme dans l'exemple précédent). En revanche, lorsque l'on ne peut pas lister les éléments de l'ensemble, on cherche une façon de décrire ces éléments.

Exemple 2.7 : On veut définir l'ensemble P comme étant l'ensemble contenant tous les nombres entiers pairs. Comme il en existe une infinité, on ne peut pas les énumérer. On note alors, par exemple, $P = \{x \text{ tels que } x \text{ soit un entier pair}\}$. On verra ultérieurement comment formaliser mathématiquement « x tels que x soit un entier pair ».

Définition 2.8 : On appelle **singleton** tout ensemble composé d'un seul élément.

Exemple 2.9 : Les ensembles $E = \{1\},\ F = \{2\}$ ou encore $G = \{a\}$ sont des singletons.

Remarque 2.10 : Il ne faut pas confondre un singleton avec l'élément qu'il contient.

Exemple 2.11 : $E = \{3\}$ est un ensemble de réels (même s'il n'en contient qu'un) alors que 3 est un réel.

Définition 2.12 : On appelle **cardinal** d'un ensemble et on note *card* le nombre d'éléments que contient l'ensemble.

Exemple 2.13 : Si $E = \{a, b, c, d\}$, $card(E) = 4$. Le cardinal d'un singleton est 1.

Remarque 2.14 : Il existe un unique ensemble de cardinal nul, *i.e.* ne contenant aucun élément : il s'agit de l'ensemble vide noté $\varnothing$.

2.2 Sous-ensembles

2.2.1 Inclusion

Définition 2.15 : Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F et on note

$$E \subseteq F$$

si tous les éléments de E appartiennent à F. On dit alors que E est un **sous-ensemble** de F, ou encore une **partie** de F.

Exemple 2.16 : Si $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{a, b, c, d, e, f\}$, alors $E \subseteq F$.

Remarque 2.17 : par définition de l'égalité de deux ensembles, on a $E = F$ si et seulement si $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.

Remarque 2.18 : L'ensemble vide $\varnothing$ est inclus dans tous les ensembles. Soit un ensemble E quelconque, on a toujours $\varnothing \subseteq E$.

2.2.2 Ensemble des parties

Définition 2.19 : Soit E un ensemble. Les sous-ensembles (ou parties) de E forment un ensemble appelé **ensemble des parties de E**, et noté $\mathcal{P}(E)$:

$$\mathcal{P}(E) = \{F \mid F \subseteq E\}$$

Remarque 2.20 : $\mathcal{P}(E) = \{F \mid F \subseteq E\}$ se lit « $\mathcal{P}$(E) est l'ensemble des F tels que F soit inclus dans E ».

Remarque 2.21 : Quelque soit l'ensemble E, on a toujours $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$. En effet, on a dit précédemment que $\varnothing \subseteq E$ et, naturellement, $E \subseteq E$.

Exemple 2.22 : Soit $E = \{1, 2, 3\}$. On cherche alors à calculer $\mathcal{P}(E)$. On cherche méthodiquement les éléments qui composent $\mathcal{P}(E)$. On commence par les ensembles à 0 élément, puis 1, puis 2, ... :

Proposition 2.23 : Soit E un ensemble fini de cardinal n. On a :

$$card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

▷ **Démonstration :** *On cherche à former un sous-ensemble de E. Comment s'y prend-on ? On regarde le premier élément de E et l'on se dit « Le prends-je ou ne le prends-je pas ? ». On a donc 2 possibilités. On regarde ensuite le second éléments et on se pose la même question, on a donc de nouveau 2 possibilités. Au final, on aura* $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$ *possibilités.* ■

2.3 Opérations sur les ensembles

2.3.1 Union

Définition 2.24 : On appelle **union** (ou **réunion**) de deux ensembles A et B et l'on note

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.

Exemple 2.25 : Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 4, 5\}$ alors $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$.

Remarque 2.26 : Quelque soit l'ensemble E, on a $E \cup \varnothing = E$. On dit que $\varnothing$ est l'élément neutre de l'union.

Remarque 2.27 : $A \cup B$ se lit « A union B ».

Remarque 2.28 : Lorsque l'on veut désigner l'union de n ensembles où $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

2.3.2 Intersection

Définition 2.29 : On appelle **intersection** de deux ensembles A et B et l'on note

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

Exemple 2.30 : Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 4, 5\}$ alors $A \cap B = \{2\}$.

Remarque 2.31 : Quelque soit l'ensemble E, on a $E \cap \varnothing = \varnothing$. On dit que $\varnothing$ est l'élément absorbant de l'intersection.

Remarque 2.32 : $A \cap B$ se lit « A inter B ».

Remarque 2.33 : Lorsque l'on veut désigner l'intersection de n ensembles où $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

Définition 2.34 : On dit que deux ensembles A et B sont **disjoints** si

$$A \cap B = \varnothing$$

Autrement dit, s'il n'existe aucun élément commun à A et à B.

2.3.3 Différence

Définition 2.35 : On appelle **différence** des ensembles A et B et l'on note

$$A \backslash B \quad \text{ou} \quad A - B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B.

Remarque 2.36 : $A \backslash B$ (ou $A - B$) se lit « A privé de B ».

Exemple 2.37 : Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 4, 5\}$ alors $A \backslash B = \{1\}$.

Remarque 2.38 : On a les propriétés évidentes suivantes :
- $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$
- $A \backslash \varnothing = A$
- $A \backslash A = \varnothing$

2.3.4 Complémentaire

Remarque 2.39 : Lorsqu'on parle du complémentaire d'un ensemble, on sous-entend que l'on se place dans un « sur-ensemble » qui contient tous les éléments de l'étude. En début d'énoncé, vous devez voir une phrase de la forme « on se place dans $\mathbb{R}$ » ou « on se place dans $\mathbb{N}$ » ... On appelle généralement Ω cet ensemble de base et l'on parle parfois d'univers.

Définition 2.40 : On se place dans un ensemble Ω. On appelle **complémentaire** d'un ensemble A l'on note

$$\overline{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à A.

Remarque 2.41 : Voici deux formules connues sous le nom de loi de **De Morgan** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \\ \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \end{array} \right.$$

Remarque 2.42 : $A \backslash B = A \cap \overline{B}$

Remarque 2.43 : $\overline{A} = \Omega \backslash A$

Exemple 2.44 : On se place dans $\mathbb{N}$. Soient les ensembles $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et $F = \{x \mid x \text{ entier positif pair}\}$.

2.4 Application caractéristique (indicatrice)

On se place dans un ensemble Ω (ce qui signifie que tous les ensembles considérés dans cette partie seront des sous-ensembles de Ω).

Définition 2.45 : On appelle **application caractéristique** ou **indicatrice** d'un ensemble E et l'on note $\mathbb{1}_E$ l'application telle que :

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E \\ 0 \text{ si } x \notin E \end{cases}$$

Remarque 2.46 : La définition d'une application sera donneé dans un chapitre ultérieur.

Remarque 2.47 : On a les propriétés essentielles suivantes :
- $A = B$ si et seulement si pour tous les éléments x de Ω, $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$
- pour tout élément x de Ω, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x).\mathbb{1}_B(x) = \min(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x))$
- pour tout élément x de Ω, $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)-\mathbb{1}_A(x).\mathbb{1}_B(x) = \max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x))$
- pour tout élément x de Ω, $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$
- pour tout élément x de Ω, $\mathbb{1}_{A\setminus B}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x).\mathbb{1}_B(x)$

2.5 Partition

Définition 2.48 : Soit E un ensemble non vide. On appelle **partition** de E tout sous-ensemble P de $\mathcal{P}(E)$ tel que :
- tout élément de P est non vide
- les éléments de P sont deux à deux disjoints
- $\bigcup\limits_{e\in P} e = E$, *i.e.* l'union de tous les élements de P est égale à E

Remarque 2.49 : Si E est un ensemble fini, alors on peut écrire P de la façon suivante : $P = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ et on peut alors reformuler la définition de la façon suivante : P est une partition de E si :
- pour tout i de 1 à n, $A_i \neq \varnothing$
- pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = E$

Remarque 2.50 : Une partition d'un ensemble E est tout simplement un « découpage » de E en plusieurs morceaux non vides et disjoints.

> **Exemple 2.51 :** Soit un $E = \{a, b, c, d, e\}$. L'ensemble $P = \big\{\{a, e\}, \{b\}, \{c, d\}\big\}$ est une partition de E.

2.6 Ensembles remarquables

Voici quelques ensembles bien connus :
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des réels ($1.25 \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$, $\dfrac{8}{3} \in \mathbb{R}$)

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$
- $\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs $(\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$
- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$: l'ensemble des booléens
- $\mathcal{E}_{MG} = \{\text{Alexandre, Bourdier, Scheid}\}$: l'ensemble des enseignants de Maths Générales.

2.7 Exercices

▷ *Exercice 2.52 :* On considère que notre univers est Ω (*i.e.* tous les ensembles considérés sont des sous-ensembles de Ω). Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. ☐ $A \cap B$ est le plus grand ensemble contenu à la fois dans les ensembles A et B.
2. ☐ $A \cap B$ est le plus petit ensemble contenu à la fois dans les ensembles A et B.
3. ☐ $A \cup B$ est le plus grand ensemble contenant les éléments de A et de B.
4. ☐ $A \cup B$ est le plus petit ensemble contenant les éléments de A et de B.
5. ☐ $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = \Omega$
6. ☐ $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = A$
7. ☐ $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$
8. ☐ Soient $I \subseteq \mathbb{N}$ et $k \in I$, $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$
9. ☐ $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \cup B = A$
10. ☐ $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \cup B = B$
11. ☐ $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \cap B = A$
12. ☐ $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \cap B = B$
13. ☐ $A \subseteq B$ et $B \subseteq A \;\Rightarrow\; A = B$
14. ☐ $\displaystyle\bigcup_{x\in A} \{x\} = \Omega$
15. ☐ $\displaystyle\bigcup_{x\in A} \{x\} = A$
16. ☐ $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
17. ☐ $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$
18. ☐ $A \cup \overline{A} = \Omega$
19. ☐ $card(A \cap B) < card(A)$
20. ☐ $card(A \cup B) \geq card(A)$
21. ☐ $card(A \cup B) = card(A) \Leftrightarrow B \subseteq A$
22. ☐ $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$
23. ☐ $A \cap B = \varnothing \Rightarrow card(A \cup B) = card(A) + card(B)$
24. ☐ $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow card(A \cup B) < card(A) + card(B)$

▷ *Exercice 2.53 :* Déterminez les ensembles suivants :

$$\bigcup_{A\in\mathcal{P}(E)} A \quad \text{et} \quad \bigcap_{A\in\mathcal{P}(E)} A$$

▷ *Exercice 2.54 :* Soit $B = \{0, 1\}$.

1. A-t-on $B \subseteq B$?
2. Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(B)$?
3. Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$?
4. Mêmes questions pour $B = \varnothing$.

3 Produit cartésien, n-uplets

3.1 n-uplets

Nous avons défini les ensembles comme étant des collections d'objets dans lesquelles l'ordre des éléments n'importe pas et où chaque élément apparaît de manière unique. Nous définissons désormais des collections d'objets tenant compte de l'ordre des éléments et où un éléments peut apparaître plusieurs fois.

Définition 3.1 : On appelle **couple** une collection de deux éléments notée

$$(a, b)$$

telle que $(a, b) = (c, d)$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.

Remarque 3.2 : Si $a \neq b$, $(a, b) \neq (b, a)$.

Remarque 3.3 : De la même façon, on peut définir les notions de triplets, de quadruplet, . . . , de n-uplet.

Définition 3.4 : On appelle **n-uplet** une collection de n éléments notée

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

telle que $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ si et seulement si $a_1 = b_1$ et $a_2 = b_2$, . . . , $a_n = b_n$.

3.2 Produit cartésien

Définition 3.5 : Soient E_1 et E_2 deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E_1 et de E_2 et l'on note $E_1 \times E_2$ l'ensemble des couples (a_1, a_2) tels que a_1 soit un élément de E_1 et a_2 un élément de E_2 :

$$E_1 \times E_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in E_1 \text{ et } a_2 \in E_2\}$$

On définit de même le produit cartésien de n ensembles E_1, . . . , E_n par :

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in E_1 \text{ et } a_2 \in E_2 \text{ et } \ldots \text{ et } a_n \in E_n\}$$

Remarque 3.6 : On écrit E^n à la place de $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ occurences de } E}$

Remarque 3.7 : L'expression « Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ » est donc strictement équivalente à « Soient $a_1 \in E_1,\ a_2 \in E_2, \dots,\ a_n \in E_n$ ».

Exemple 3.8 : Soient $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ deux ensembles. Le produits cartésien $E \times F$ contient tous les couples suivants :

Remarque 3.9 : Le produit cartésien d'un ensemble par l'ensemble vide est l'ensemble vide : $E \times \varnothing = \varnothing$.

4 Quantificateurs

4.1 Quel que soit

Définition 4.1 : On introduit un symbole très utilisé en mathématiques, le **quantificateur universel** $\forall$ qui se lit « quel que soit » ou « pour tout ».

Remarque 4.2 : On utilise ce quantificateur pour exprimer le fait qu'une propriété est vraie pour tous les éléments d'un ensemble donné.

Exemple 4.3 : La propriété

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

se lit « Pour tous les éléments de x de E, la propriété $P(x)$ est vraie ». Par exemple, si on note $P(x)$ la propriété « x est pair » et $E = \{2, 4, 10, 16, 28\}$ alors, on a effectivement $\forall x \in E,\ P(x)$, autrement dit, $2, 4, 10, 16$ et 28 sont des nombres pairs.

Remarque 4.4 : Lorsque l'on doit démontrer une propriété de la forme : « $\forall x \in E,\ \dots$ » la démonstration débutera par : « **Soit** $x \in E$ », autrement dit, en considérant un x quelconque de E. Comme la propriété aura été démontrée pour un élément quelconque de E, elle sera valable pour tous les éléments de E.

4.2 Il existe

Définition 4.5 : On introduit un nouveau symbole également très utilisé en mathématiques, le **quantificateur existentiel** $\exists$ qui se lit « il existe ».

Exemple 4.6 : La propriété

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

se lit « Il existe au moins un élément x de E tel que $P(x)$ soit vraie » ou encore « On peut trouver un x de E (éventuellement plusieurs) qui vérifie $P(x)$ ».

Remarque 4.7 : « $\exists x \in E,\ P(x)$ » s'écrit également « $\exists x \in E\ ;\ P(x)$ » ou « $\exists x \in E\ :\ P(x)$ » ou encore « $\exists x \in E \mid P(x)$ ».

Exemple 4.8 : Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et soit $P(x)$ la propriété « x est pair ». On s'apperçoit que la proposition « $\forall x,\ P(x)$ » et fausse mais que « $\exists x,\ P(x)$ » est vraie. En effet, 2, 4 et 6 sont pairs mais 1, 3 et 5 ne le sont pas.

Définition 4.9 : On introduit enfin un dernier quantificateur : $\exists!$ qui se lit « il existe un unique ».

Remarque 4.10 : Ce quantificateur est plus précis que le quantificateur existentiel. Il indique à la fois l'existence d'un élément mais également son unicité.

Exemple 4.11 : Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(x)$ la propriété « x est pair » et $Q(x)$ la propriété « $x \geq 6$ ». On a alors :
- « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est
- « $\forall x \in E,\ Q(x)$ » est
- « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est
- « $\exists x \in E,\ Q(x)$ » est
- « $\exists! x \in E,\ P(x)$ » est
- « $\exists! x \in E,\ Q(x)$ » est

4.3 Quantification multiple

La formulation d'une propriété peut nécessiter l'utilisation de plusieurs quantificateurs. Par exemple :

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ \exists z \in G,\ P(x) \text{ et } R(y, z)$$

Si ces écritures vous sont peu familières, habituez-vous à les traduire en « français » : « Pour tous les éléments x de E et y de F, on peut trouver au moins un z dans G tel que $P(x)$ et $R(y, z)$ soient vraies ».

Remarque 4.12 : On peut intervertir des quantificateurs de même nature se succédant dans une formule sans en changer le sens. Autrement dit :

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ \forall z \in G,\ \ldots$$

est équivalent à

$$\forall y \in F,\ \forall z \in G,\ \forall x \in E,\ \ldots$$

ou encore

$$\forall (x, y, z) \in E \times F \times G,\ \ldots$$

De la même façon :

$$\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ \exists z \in G,\ \ldots$$

est équivalent à

$$\exists y \in F,\ \exists z \in G,\ \exists x \in E,\ \ldots$$

ou encore

$$\exists (x, y, z) \in E \times F \times G,\ \ldots$$

Remarque 4.13 : En revanche, il est absolument interdit d'intervertir des quantificateurs différents :

$$\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ \ldots$$

n'est **pas** équivalent à

$$\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ \ldots$$

Dans le premier cas, pour tout x de E, on peut trouver un y, mais ce y peut être différent pour chaque x. Dans le second cas, on dit qu'il existe un y qui correspond à tous les x. La seconde formule est donc un cas particulier de la première lorsque le y est le même pour tous les x.

> **Exemple 4.14 :** Soient $E = \{1, 3, 5\}$ et $F = \{2, 4, 6\}$ deux ensembles et la propriété $\mathcal{P}(x, y)$ qui signifie « $y = x + 1$ ». On a :
>
> $$\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x, y)$$
>
> Ce qui se lit : « Pour tous les élements x de E, on peut trouver un élément y de F tel que $y = x + 1$ ». En revanche, il est faux d'écrire :
>
> $$\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ \mathcal{P}(x, y)$$
>
> Ce qui signifie « Il existe un élément y de F qui vérifie pour tous les x de E : $y = x + 1$ ».

Remarque 4.15 : Ces quantificateurs offrent un pouvoir d'expression remarquable. Admettons que nous souhaitions définir l'ensemble E comme étant l'ensemble des entiers naturels pairs. On pourrait écrire :

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N},\ x = 2 \times p\}$$

Ou encore, l'ensemble F des entiers naturels multiples de 3 mais pas multiples de 9 :

$$F = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}, \nexists q \in \mathbb{N},\ x = 3 \times p,\ x = 9 \times q\}$$

4.4 Exercices

▷ *Exercice 4.16 :* Soit $R \subseteq \mathbb{N} \times \{a, b, c\} \times \mathbb{N}$ défini par

$$R = \{(0, a, 1), (2, a, 0), (1, b, 3), (3, b, 2), (3, a, 9), (0, b, 4)\}$$

1. Déterminez les ensembles suivants :
   - (i) $\{x \in \{a, b, c\} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ (0, x, y) \in R\}$
   - (ii) $card\big(\{(x, y, z) \in R \mid x \leq 1\}\big)$
   - (iii) $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \{a, b, c\} \mid \exists z \in \mathbb{N},\ y = c\ \wedge\ (x, y, z) \in R\}$
2. Formalisez :
   - (i) L'ensemble des triplets de R contenant b.

(*ii*) L'ensemble dont les éléments sont $(0,1),(2,0),(1,3),(3,2),(3,9),(0,4)$ (en fonction de R).

(*iii*) L'ensemble des entiers intervenant dans un triplet de R contenant 1.

3. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont exactes ?

(*i*) ☐ $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists (y,z) \in \{a,b,c\} \times \mathbb{N},\ (x,y,z) \in R$

(*ii*) ☐ $\forall (x,y) \in \mathbb{N} \times \{a,b,c\},\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{N},\ \big((x,y,z_1) \in R\ \wedge\ (x,y,z_2) \in R) \Rightarrow z_1 = z_2$

(*iii*) ☐ $\forall y \in \{a,b,c\},\ \exists (x,z) \in \mathbb{N}^2,\ (x,y,z) \in R \cup \{(2,c,5)\}$

(*iv*) ☐ $\exists (x,z) \in \mathbb{N}^2,\ \forall y \in \{a,b,c\},\ (x,y,z) \in R \cup \{(2,c,5)\}$

(*v*) ☐ $\forall E \in \mathcal{P}(R),\ E \neq \varnothing \Rightarrow \exists \alpha \in R,\ \alpha \in E$

Deuxième partie
Relations, fonctions, applications

1 Relations

1.1 Définitions

Définition 1.1 : On appelle **relation** binaire de l'ensemble E dans l'ensemble F tout sous ensemble de $E \times F$:

$$\mathcal{R} \subseteq E \times F$$

E est l'**ensemble de départ** ou **domaine** de la relation $\mathcal{R}$ et F l'**ensemble d'arrivée**.

Remarque 1.2 : De la définition découle qu'une relation est assimilée à un ensemble.

Remarque 1.3 : Puisqu'une relation de E dans F est un éléments de $\mathcal{P}(E \times F)$, si E et F sont deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et m, le nombre de relations possibles est $2^{n \times m}$.

Définition 1.4 : Soit $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ (*i.e.* une relation de E dans F). On dit que $x \in E$ est en relation par $\mathcal{R}$ avec $y \in F$ si

$$(x, y) \in \mathcal{R}$$

On note également $x \ \mathcal{R} \ y$ ou encore $\mathcal{R}(x, y)$.

Remarque 1.5 : On dit que y est **une image** de x par $\mathcal{R}$ ou encore que x est **un antécédent** de y par $\mathcal{R}$.

Exemple 1.6 : Soient les ensembles suivants $M = \{MN,\ MD,\ SIC\}$ et $E = \{Alexandre, Besnard, Bourdier, Koutsawa, Pincon, Rouyer, Scheid, Tomczak\}$.
On peut définir la relation $\mathcal{E} \subseteq E \times M$ d'ensemble de départ E et d'ensemble d'arrivée M signifiant « enseigne » :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \ = \ & \big\{(Alexandre, MD),\ (Bourdier, MD),\\ & (Bourdier, MN),\ (Koutsawa, MN),\\ & (Pincon, MN),\ (Rouyer, MD),\\ & (Scheid, MN),\ (Tomczak, SIC)\big\} \end{aligned}$$

On remarque que $Besnard$ n'a pas d'image pas $\mathcal{E}$. En effet, $\mathcal{E}$ étant une relation dans M, si l'enseignant intervient dans un module qui n'appartient pas à M, il n'aura pas d'image pas $\mathcal{E}$.

Définition 1.7 : On appelle **domaine** d'une relation $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ et l'on note $Dom(\mathcal{R})$ l'ensemble des éléments de E qui ont une image dans F par $\mathcal{R}$.

Remarque 1.8 : Si $\mathcal{R} \subseteq E \times F$, on a nécessairement $Dom(\mathcal{R}) \subseteq E$.

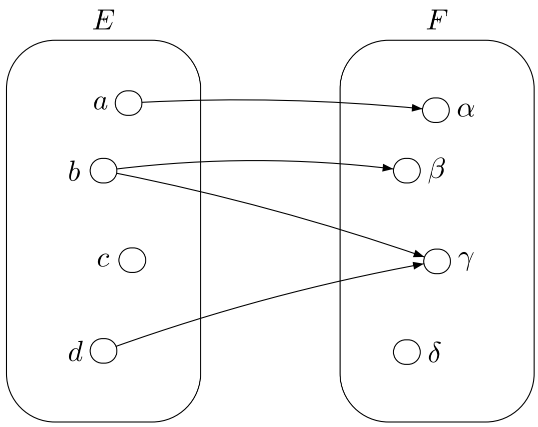
Définition 1.9 : On appelle **image** (ou **codomaine)** d'une relation $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ et l'on note $Im(\mathcal{R})$ l'ensemble des éléments de F possédant au moins un antécédent dans E par $\mathcal{R}$.

Remarque 1.10 : Si $\mathcal{R} \subseteq E \times F$, on a nécessairement $Im(\mathcal{R}) \subseteq F$.

1.2 Représentation

Si E et F sont deux ensembles finis, alors toute relation $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ est nécessairement fini. Dans ce cas, on peut donner à $\mathcal{R}$ une représentation dite **sagittale** : les ensembles E et F sont représensés par des « patatoïdes » et un élément x de E est relié par une flèche orienté vers un élément y de F si $(x, y) \in \mathcal{R}$

Exemple 1.11 : Soient $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ deux ensembles et la relation $\mathcal{R} = \{(a, \alpha), (b, \beta), (b, \gamma), (d, \gamma)\}$. Une représentation saggitale de la relation $\mathcal{R}$ est donnée par le graphe suivant :



On visualise immédiatement

1.3 Relation réciproque

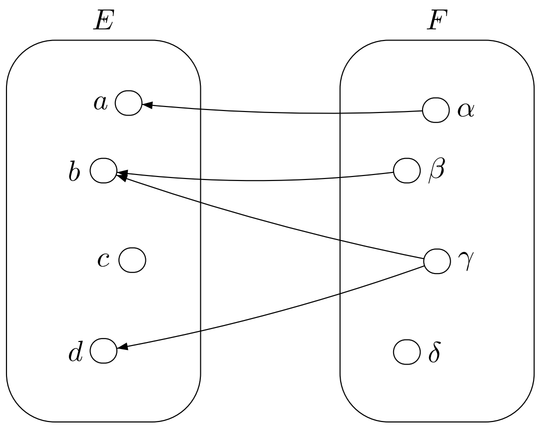
Définition 1.12 : On appelle **relation réciproque** d'une relation $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ la relation définie par :

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in F \times E \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

i.e. $(y, x) \in \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}$ (ou encore $y\,\mathcal{R}^{-1}\,x \Leftrightarrow x\,\mathcal{R}\,y$).

Remarque 1.13 : Pour obtenir la représentation sagittale de $\mathcal{R}^{-1}$, il faut et il suffit de modifier le sens des flèches de la représentation sagittale de $\mathcal{R}$.

Exemple 1.14 : Si l'on reprend d'exemple précédent, une représentation saggitale de $\mathcal{R}^{-1}$ est donnée par :



Remarque 1.15 : Les résultats suivants découlent immédiatement de la définition (et se vérifient visuellement sur le graphe) :

$$\begin{cases} Dom(\mathcal{R}) = Im(\mathcal{R}^{-1}) \\ Dom(\mathcal{R}^{-1}) = Im(\mathcal{R}) \\ (\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R} \end{cases}$$

1.4 Image et image réciproque d'une partie

Définition 1.16 : Soient $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ (*i.e.* une relation de E dans F) et $A \subseteq E$. On appelle **image de A par $\mathcal{R}$** et l'on note

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

l'ensemble des images des éléments de A par $\mathcal{R}$.

Remarque 1.17 : Si $\mathcal{R} \subseteq E \times F$, $\mathcal{R}(E) = Im(\mathcal{R})$.

Remarque 1.18 : Soient $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ et $A \subseteq E$. Si $A \cap Dom(\mathcal{R}) = \varnothing$, alors $\mathcal{R}(A) = \varnothing$.

Définition 1.19 : Soient $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ (*i.e.* une relation de E dans F) et $B \subseteq F$. On appelle **image réciproque de B par $\mathcal{R}$** et l'on note

$$\mathcal{R}^{-1}(B) = \{x \in E \mid \exists y \in B,\ (x, y) \in \mathcal{R}\} = \left\{x \in E \mid \exists y \in B,\ (y, x) \in \mathcal{R}^{-1}\right\}$$

l'ensemble des antécédents des éléments de B par $\mathcal{R}$.

Remarque 1.20 : Si $\mathcal{R} \subseteq E \times F$, $\mathcal{R}^{-1}(F) = Dom(\mathcal{R})$.

Remarque 1.21 : Soient $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ et $B \subseteq F$. Si $B \cap Im(\mathcal{R}) = \varnothing$, alors $\mathcal{R}^{-1}(B) = \varnothing$.

1.5 Restriction, prolongement, égalité

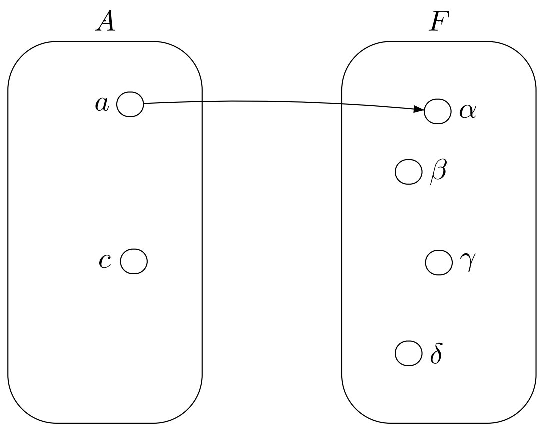
Définition 1.22 : Soient $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ une relation de E dans F et $A \subseteq E$. On appelle **restriction de $\mathcal{R}$ à** A et l'on note généralement

$$\mathcal{R}_{|A} = \mathcal{R} \cap (A \times F)$$

Définition 1.23 : Soient $\mathcal{R}_1 \subseteq E \times F$ une relation de E dans F et $\mathcal{R}_2 \subseteq A \times F$ où $A \subseteq E$. Si $\mathcal{R}_2$ est la restriction de $\mathcal{R}_1$ à A, alors $\mathcal{R}_1$ est **un prolongement** de $\mathcal{R}_2$ à E.

Remarque 1.24 : $\mathcal{R}_2$ est **la** restriction de $\mathcal{R}_1$ à A mais $\mathcal{R}_1$ est **un** prolongement de $\mathcal{R}_2$ à E.

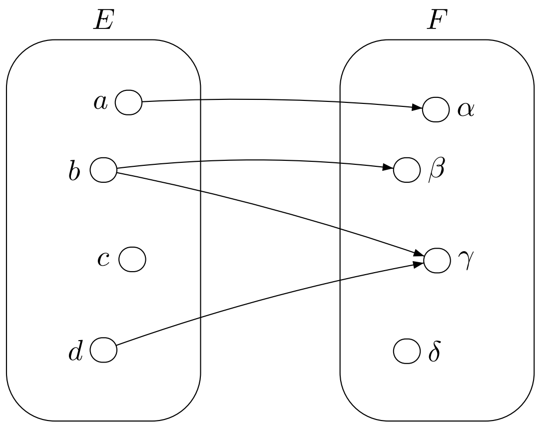
Exemple 1.25 : On considère de nouveau la relation $\mathcal{R}$ définie dans les précédents exemple ainsi que sa restriction à $A = \{a, c\}$, $\mathcal{R}_{|A}$ de représentation sagittale :



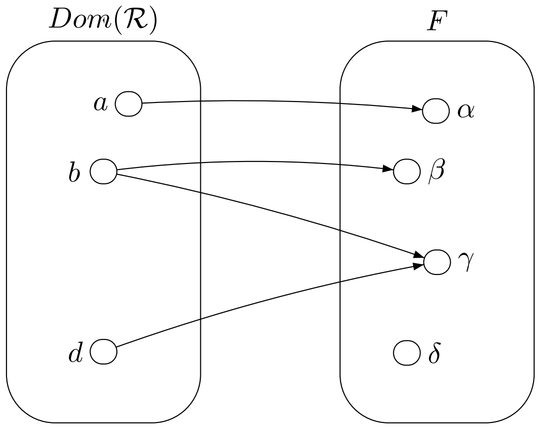
Définition 1.26 : Deux relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont égales si et seulement si :
- elles ont le même ensemble de départ
- elles ont le même ensemble d'arrivée
- elles contiennent les mêmes couples

Remarque 1.27 : Il faut bien faire attention à ne pas oublier les deux premiers points ! En particulier, la restriction de $\mathcal{R}$ à $Dom(\mathcal{R})$ ne change pas le contenu de $\mathcal{R}$ mais change l'ensemble de départ. Ces deux relations ne sont alors pas égales, ce qui se vérifie sur la représentation sagittale.

Exemple 1.28 :



et

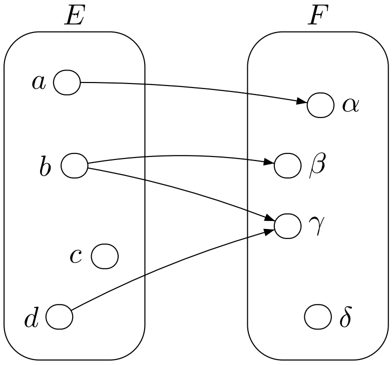


ne sont pas égales. On voit bien que, même si les éléments de $\mathcal{R}$ (représentés par les flèches) sont les mêmes, elles ne sont pas définies sur les mêmes ensembles.

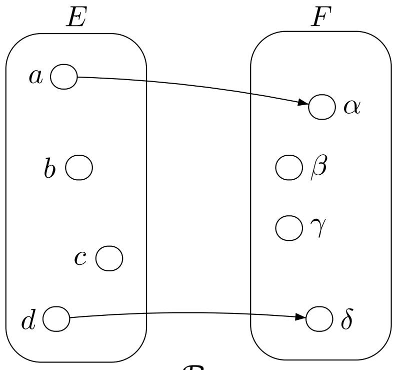
1.6 Opérations ensemblistes

Une relation étant avant tout un ensemble, on s'autorise sur les relations les mêmes opérations que sur les ensembles, dans la mesure où **les ensembles de départ et d'arrivées restent inchangés**. Nous nous contenterons d'illustrer le complémentaire, l'union et l'intersection par des représentations saggitales.

Exemple 1.29 : Soient les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ suivantes :

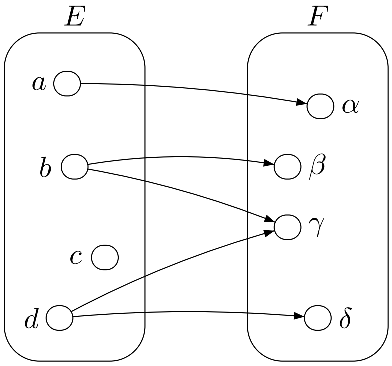


$\mathcal{R}_1$

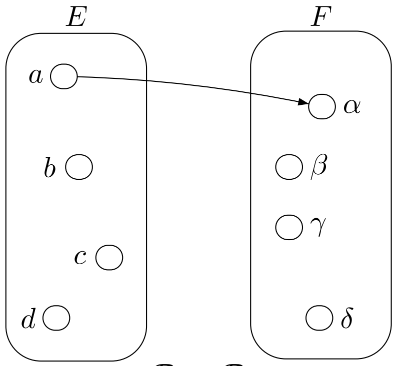


$\mathcal{R}_2$

L'union et l'intersection sont données par :

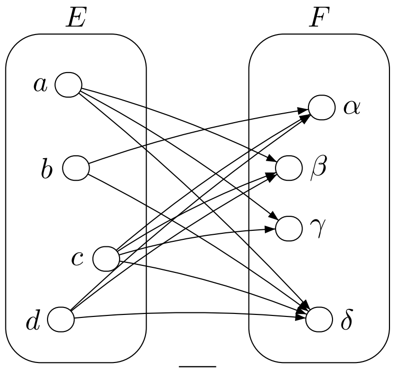


$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$



$\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$

Et le complémentaire par :



$\overline{\mathcal{R}_1}$

Définition 1.30 : Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations de E dans F. On dit que $\mathcal{R}_1$ est une **sur-relation** de $\mathcal{R}_2$ ou encore que $\mathcal{R}_2$ est une **sous-relation** de $\mathcal{R}_1$ si les éléments (*i.e.* les flèches dans la représentation sagittale) de $\mathcal{R}_2$ sont tous dans $\mathcal{R}_1$.

Remarque 1.31 : En particulier, $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est une sous-relation de $\mathcal{R}_1$ et de $\mathcal{R}_2$. $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ est, quant à elle, une sur-relation de $\mathcal{R}_1$ et de $\mathcal{R}_2$.

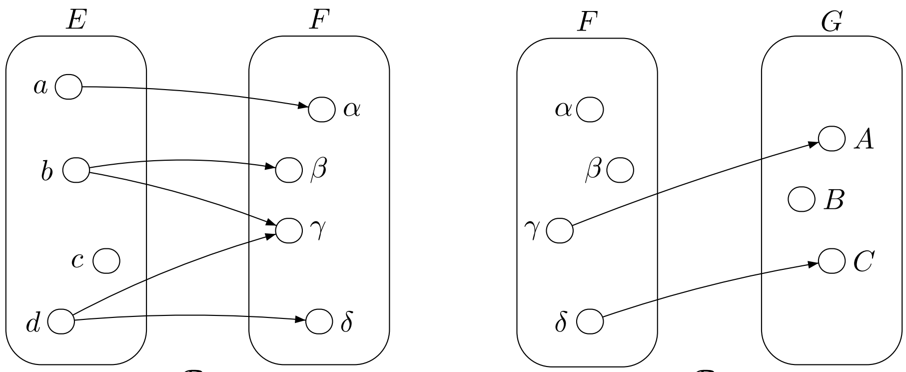
1.7 Composition

Définition 1.32 : Soient $\mathcal{R}_1 \subseteq E_1 \times F_1$ et $\mathcal{R}_2 \subseteq E_2 \times F_2$ (*i.e.* deux relations de E_1, resp. E_2, dans F_1, resp. F_2). Si et seulement si $F_1 = E_2$, on appelle **composée de** $\mathcal{R}_1$ **par** $\mathcal{R}_2$ et on note :

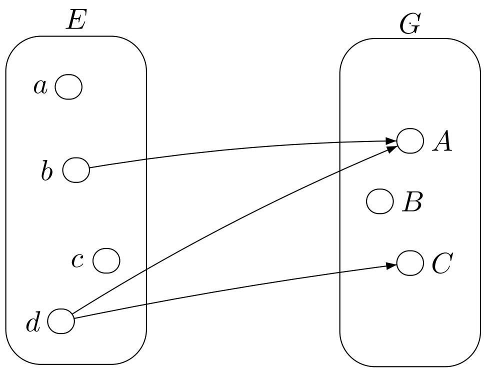
$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 \subseteq E_1 \times F_2 = \{(x, z) \in E_1 \times F_2 \mid \exists y \in F_1,\ (x, y) \in \mathcal{R}_1 \text{ et } (y, z) \in \mathcal{R}_2\}$$

la relation d'ensemble de départ E_1 et d'ensemble d'arrivée F_2 composée de l'ensemble des couples (x, z) pour lesquels on peut trouver au moins un $y \in F_1 = E_2$ tel que $x\,\mathcal{R}_1\,y$ et $y\,\mathcal{R}_2\,z$.

Exemple 1.33 :



$\mathcal{R}_1$ $\mathcal{R}_2$



$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$

Remarque 1.34 : Soit $n > 2$. On peut étendre la définition des relations binaires aux relations n-aires en constatant qu'une relation n-aire est une relation binaire dont l'ensemble de départ est un produit cartésien.

1.8 Propriétés

Définition 1.35 : Soit $\mathcal{R} \subseteq E \times E$ une relation. $\mathcal{R}$ est dite **réflexive** si
$\mathcal{R}$ est dite **irréflexive** si

Définition 1.36 : Soit $\mathcal{R} \subseteq E \times E$ une relation. $\mathcal{R}$ est dite **symétrique** si
$\mathcal{R}$ est dite **antisymétrique** si

Remarque 1.37 : Cette définition peut également s'écrire :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \big((x \,\mathcal{R}\, y) \text{ et } (y \,\mathcal{R}\, x)\big) \Rightarrow x = y$$

Définition 1.38 : Soit $\mathcal{R} \subseteq E \times E$ une relation. $\mathcal{R}$ est dite **transitive** si

1.9 Relations d'équivalence

Définition 1.39 : Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est

Remarque 1.40 : L'égalité est une relation d'équivalence.

Exemple 1.41 : Soit $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2,\ x \,\mathcal{R}\, y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ x - 3 \times p = y - 3 \times q)$$

autrement dit, $x \,\mathcal{R}\, y$ si et seulement si x et y ont le même reste dans la division euclidienne par 3. Par exemple $3 \,\mathcal{R}\, 0$ ou encore $4 \,\mathcal{R}\, 13$.
On vérifie simplement que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :
- $\mathcal{R}$ est réflexive. En effet, $\forall x \in E,\ x \,\mathcal{R}\, x$.
- $\mathcal{R}$ est symétrique. En effet, si x a le même reste que y dans la division euclidienne par 3, alors y a le même reste que x ...
- $\mathcal{R}$ est transitive. En effet, si x a le même reste que y dans la division euclidienne par 3 et si y a le même reste que z dans la division euclidienne par 3, alors si x a le même reste que z dans la division euclidienne par 3.

Définition 1.42 : Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et x un élément de E. On appelle classe d'équivalence de x l'ensemble :
La classe d'équivalence d'un élément est simplement l'ensemble des éléments de E qui

lui sont équivalents.

Exemple 1.43 : Si l'on reprend l'exemple précédent, on a :
- $\langle\, 0 \,\rangle_{\mathcal{R}} = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$
- $\langle\, 1 \,\rangle_{\mathcal{R}} = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots\}$
- $\langle\, 2 \,\rangle_{\mathcal{R}} = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}$

Remarque 1.44 : Soit $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E. $\forall (x,y) \in E^2$

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ ssi } \langle\, x \,\rangle_{\mathcal{R}} = \langle\, y \,\rangle_{\mathcal{R}}$$

1.10 Relations d'ordre

Définition 1.45 : Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si $\mathcal{R}$ est
- réflexive
- antisymétrique
- transitive

Remarque 1.46 : La relation « est inférieur ou égal à », usuellement notée « $\leq$ » est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. A noter que pour éviter toute ambiguïté, nous devrions écrire $\leq_{\mathbb{N}}$.

Remarque 1.47 : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. On dit que deux éléments x et y sont **comparables** ssi

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ ou } y \,\mathcal{R}\, x$$

Définition 1.48 : Une relation d'ordre sur E est **totale** si tous les éléments de E sont comparables. Sinon, la relation est dite **partielle**.

Exemple 1.49 : Soient $E = \{0, 1\}^2$ et soit $\leq_E$ la relation définie par :

$$\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in E^2, \quad \big((x_1, x_2) \leq_E (y_1, y_2)\big) \Leftrightarrow \big(x_1 \leq y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2\big)$$

On s'aperçoit que $\leq_E$ est une relation d'ordre partielle. En effet, on ne peut pas comparer $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

Définition 1.50 : Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation de E dans E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre strict** si $\mathcal{R}$ est
- irréflexive
- antisymétrique
- transitive

Remarque 1.51 : On peut se dispenser de la condition d'antisymétrie dans la définition puisque l'irréflexité et la transitivité impliquent l'antisymétrie.

Remarque 1.52 : La relation sur $\mathbb{N}$ « est strictement inférieur à », usuellement notée « $<$ » est une relation d'ordre strict.

2 Fonctions, applications

2.1 Définitions

Définition 2.1 : Soit $f \subseteq E \times F$ une relation de E dans F. f est une **fonction** de E dans F si et seulement si tout élément de E possède au plus une (soit zéro, soit une) image dans F par f :

$$\forall x \in E, \; card\big(f\big(\{x\}\big)\big) \leq 1$$

autrement dit, quelque soit x de E, $f\big(\{x\}\big)$ (l'ensemble des images de x par f) est soit l'ensemble vide, soit un singleton.

Remarque 2.2 : Soit f une fonction de E dans F et x un élément de E. S'il existe $y \in F$ tel que $(x, y) \in f$, alors y est unique et est notée $f(x)$.

Définition 2.3 : Lorsque l'on définit une fonction f de E dans F, on note :

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

et on lit « f est une fonction de E dans F qui à x associe $f(x)$ ». On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des fonctions de E dans F.

Exemple 2.4 : La fonction « cosinus »

$$\begin{array}{rccc} cos: & \mathbb{R} & \to & [-1, 1] \\ & x & \mapsto & cos(x) \end{array}$$

appartient à $\mathcal{F}(\mathbb{R},[-1,1])$. On peut également définir la fonction « carré »

$$\begin{array}{rccc} carre : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & x \times x \end{array}$$

Remarque 2.5 : Lorsque l'on n'a pas besoin de spécifier le nom de la fonction que l'on manipule et qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les ensembles de départ et d'arrivée, on peut désigner une fonction directement par son expression : $x \mapsto f(x)$

Exemple 2.6 : Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on peut écrire directement $x \mapsto x \times x$ pour désigner la fonction « carré », ou encore $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Remarque 2.7 : Lorsque l'ensemble de départ E d'une fonction f est un produit cartésien de n ensembles $E_1, \ldots, E_n$, on dit que f est une fonction d'**arité** n ou encore une fonction **à** n **variables** et l'on note :

$$\begin{array}{rccc} f : & E_1 \times \ldots \times E_n & \to & F \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

x_i est appelée $i^{\text{ième}}$ variable de f.

Exemple 2.8 : La fonction « puissance » qui appartient à $\mathcal{F}(\mathbb{R}\times\mathbb{N},\mathbb{R})$ est définie par

$$\begin{array}{rcccl} puiss : & \mathbb{R}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{R} & \\ & (x,n) & \mapsto & x^n & = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{array}$$

Elle est d'arité 2, x est sa première variable et n sa seconde variable.

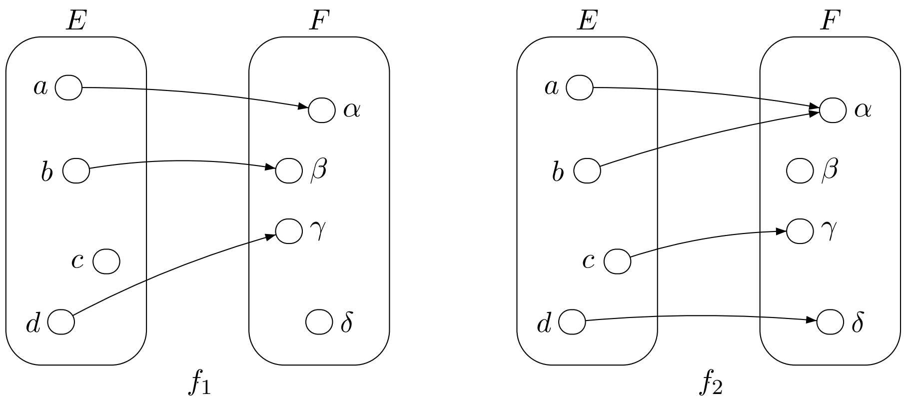
Définition 2.9 : Soit $f : E \to F$ une fonction de E dans F. On dit que f est une **application** (ou une **fonction totale**) si

autrement dit si tous les éléments de l'ensemble de départ possèdent une image par f

dans l'ensemble d'arrivée :

Remarque 2.10 : Si f est une fonction, sa restriction à son domaine est une application.

Exemple 2.11 : Soient deux relations f_1 et f_2 de E dans F de représentation sagittale :



f_1 est une fonction et f_2 est non seulement une fonction, mais également une application :

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & E & \rightarrow & F \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \alpha \;\text{ si } x = a \text{ ou } x = b \\ \gamma \;\text{ si } x = c \\ \delta \;\text{ si } x = d \end{array} \right. \end{array}$$

Remarque 2.12 : La composition de deux fonctions est une fonction et la composition de deux applications est une application.

Remarque 2.13 : En lieu et place de l'expression suivante :

$$\text{« Soit} \left\{ \begin{array}{rccc} f : & E_1 \times \ldots \times E_n & \rightarrow & F \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & y \end{array} \right. \text{»}$$

on peut dire :

« Soit f la fonction telle que $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n,\ f(x_1, \ldots, x_n) = y$ »

2.2 Injection, surjection, bijection

Définition 2.14 : Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **injective** ou est une **injection** ssi $\forall y \in F$, il existe **au plus** un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ (tout élément y de F admet au plus un antécédent x par f).

Remarque 2.15 : L'application $f : E \rightarrow F$ est injective ssi on ne peut pas trouver de $y \in F$ possédant plusieurs antécédents par f dans E :

$$\nexists (y, x, x') \in F \times E \times E,\ y = f(x) = f(x') \;\text{ et } x \neq x'$$

ce qui s'écrit également :

Remarque 2.16 : f est injective ssi il n'existe pas deux éléments différents de E qui ont la même image dans F. Autrement dit, deux éléments distincts ne peuvent pas avoir la même image :

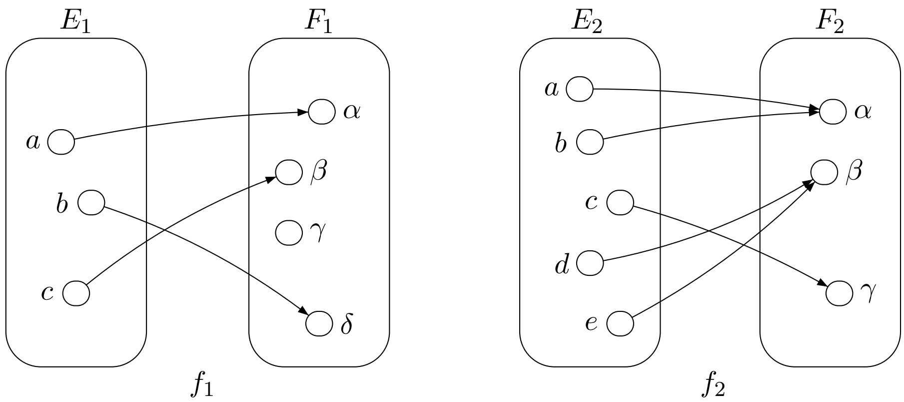
$$\forall (x, x') \in E^2, \ (x \neq x' \ \Rightarrow \ f(x) \neq f(x'))$$

Définition 2.17 : Une application $f : E \to F$ est dite **surjective** ou est une **surjection** ssi pour tout y dans l'ensemble d'arrivée F, il existe **au moins** un élément x de l'ensemble de départ E tel que $f(x) = y$:
Tout élément y de F admet au moins un antécédent x par f.

Remarque 2.18 : L'application $f : E \to F$ est surjective ssi on ne peut pas trouver de $y \in F$ ne possédant pas d'antécédent par f dans E.

Remarque 2.19 : L'application $f : E \to F$ est surjective ssi $f(E) = Im(f) = F$.

Exemple 2.20 : Soient E_1, E_2, F_1 et F_2 quatre ensembles finis et $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ deux applications :



f_1 est une injection et f_2 est une surjection.

Remarque 2.21 : L'exemple précédent illustre un phénomène connu sous le nom de **lemme des tiroirs** et qui affirme que si E a plus d'éléments que F, il est impossible de construire une injection de E dans F.

Remarque 2.22 : De la même façon, si F contient plus d'éléments que E, alors il est impossible de construire une surjection de E dans F.

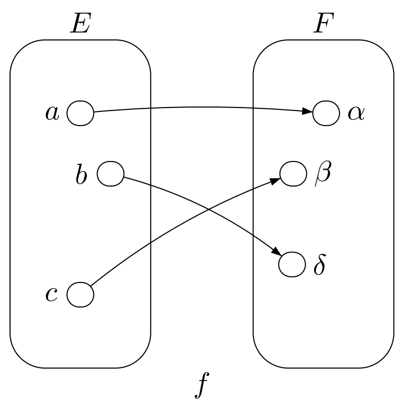
Proposition 2.23 : Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On a les propriétés suivantes :
- f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective
- f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

Définition 2.24 : Une application $f : E \to F$ est dite **bijective** ou est une **bijection** si pour tout y dans l'ensemble d'arrivée F il existe **un et un seul** x dans l'ensemble de départ E tel que $f(x) = y$:
Tout élément y de F admet un unique antécédent x par f.

Remarque 2.25 : Soit $f : E \to F$ une application. On a l'équivalence suivante :

$$f \text{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad (f \text{ injective et } f \text{ surjective})$$

Exemple 2.26 : L'application $f : E \to F$



est bijective.

Remarque 2.27 : Si l'application $f : E \to F$ est bijective, alors sa relation réciproque f^{-1} est une application, bijective et : $\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x$ et $\forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y$.

Remarque 2.28 : Attention à l'écriture abusive de $f^{-1}(y)$. Cette écriture n'a de sens que lorsque f^{-1} est une application, ce qui est le cas si f est bijective et alors $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y. On ne peut pas écrire $f^{-1}(y)$ en général : si l'on cherche les antécédents de y par une application f quelconque, alors il faut écrire $f^{-1}(\{y\})$ qui sera alors $\{x \in E \mid f(x) = y\}$.

2.3 Applications remarquables

Nous allons dresser ici la liste de quelques applications très souvent utilisées.

Définition 2.29 : On appelle **projection canonique** de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ sur E_i l'application

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n & \to & E_i \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

qui à tout n-uplet retourne le $i^{\text{ème}}$ élément.

Remarque 2.30 : Si tous les E_k sont égaux, $(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = E^n)$, alors on parle simplement de la $i^{\text{ème}}$ projection.

Définition 2.31 : On appelle application **identité** de E l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} id_E : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

On la note parfois id s'il n'y a pas d'ambiguïté sur E.

Remarque 2.32 : $\forall f \in \mathcal{F}(E, F)$ bijective, $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$.

Définition 2.33 : Soit E un ensemble et $A \subseteq E$. On appelle application **caractéristique** ou **indicatrice** de A l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{1}_A : & E & \to & \{0, 1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

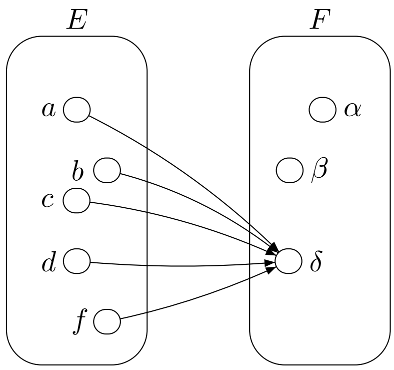
Définition 2.34 : Une application $f : E \to F$ est dite **constante** si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \ f(x) = f(y)$$

Remarque 2.35 : Si E est non vide, la définition est équivalente à

« f est constante ssi $card\big(Im(f)\big) = 1$. »

Exemple 2.36 : L'application $f : E \to F$ suivante :



est une application constante. $\forall x \in E, \ f(x) = \delta$.

Définition 2.37 : Soit E un ensemble **fini**. On appelle **permutation** de E toute application bijective de E dans E. L'ensemble des permutation de E est noté $\mathfrak{S}(E)$

Exemple 2.38 : Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble.

$$\begin{array}{rcl} \sigma : E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \begin{cases} b & \text{si } x = a \\ c & \text{si } x = b \\ a & \text{si } x = c \\ d & \text{si } x = d \end{cases} \end{array}$$

est une permutation de E.

Remarque 2.39 : Si $card(E) = n < \infty$, alors il existe $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ (n factoriel) permutations de E.

Définition 2.40 : Une application $f : E^n \rightarrow F$ d'arité n est dite **symétrique** si elle est invariante par permutation :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}([1, n]),\ \forall (x_1, \ldots, , x_n) \in E^n,\ f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

autrement dit, une application qui ne tient pas compte le l'ordre des « éléments d'entrée ».

Définition 2.41 : Une **transposition** est une **permutation** qui « échange » deux éléments et qui laisse invariant les autres éléments.

Exemple 2.42 : Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble.

$$\begin{array}{rcl} \sigma : E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \begin{cases} a & \text{si } x = a \\ c & \text{si } x = b \\ b & \text{si } x = c \\ d & \text{si } x = d \end{cases} \end{array}$$

est une transposition de E.

2.4 Exercices

▷ *Exercice 2.43 :* Pour chaque relation suivante, précisez si la relation est réflexive, irréflexive, symétrique, antisymétrique et transitive :

1. la relation d'égalité sur les entiers
2. la relation de perpendicularité sur l'ensemble des droites
3. la relation de parallélisme sur l'ensemble des droites
4. la relation « est le carré de » sur les entiers

En déduire lesquelles sont des relations d'ordre et lesquelles sont des relations d'équivalence.

▷ *Exercice 2.44 :* Soit $R \subseteq \mathbb{N} \times \{a, b, c\} \times \mathbb{N}$ définie par

$$R = \{(0, a, 1), (2, a, 0), (1, b, 3), (3, b, 2), (3, a, 9), (0, b, 4)\}$$

1. R est-elle une fonction ?
2. R est-elle une application ?
3. Formalisez l'ensemble des antécédents de 1.
4. Déterminez un ensemble R' tel quel $R \cup R'$ soit une application.

▷ *Exercice 2.45 :* Soit $R \subseteq \mathbb{N} \times \{a, b, c\} \times \mathbb{N}$ définie par

$$R = \{(0, a, 0), (0, a, 1), (1, b, 3), (1, b, 2), (3, b, 9), (3, c, 4)\}$$

1. R est-elle une fonction ?
2. R est-elle une application ?
3. Déterminez une fonction f à partir de laquelle on peut retrouver R.
4. Déterminez une application g à partir de laquelle on peut retrouver R.

▷ *Exercice 2.46 :* Que peut-on dire d'une relation à la fois symétrique et antisymétrique ?

▷ *Exercice 2.47 :* Parmi les assertions suivantes, cochez celles qui sont vraies.

1. ☐ La relation d'inclusion au sens large entre parties d'un même ensemble est une relation d'ordre.
2. ☐ Deux classes d'équivalence qui ont un élément communs ont confondues.
3. ☐ Si f est une application d'un ensemble fini dans lui-même, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ bijective}$$

▷ *Exercice 2.48 :* Soit $E = \{0, 1, 2\}$. Parmi les graphes suivants, lesquels définissent une relation d'équivalence sur E ?

1. ☐ $\Gamma = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$
2. ☐ $\Gamma = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2)\}$
3. ☐ $\Gamma = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$
4. ☐ $\Gamma = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
5. ☐ $\Gamma = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$

▷ *Exercice 2.49 :* Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On note f l'application de E dans E dont le graphe Γ est le suivant :

$$\Gamma = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 1)\}$$

Parmi les assertions suivantes, cochez celles qui sont vraies.

1. ☐ L'application f est surjective.
2. ☐ $f(\{2, 3\})$ est un singleton.
3. ☐ $f^{-1}(\{2, 3\})$ est un singleton.
4. ☐ L'image réciproque par f de tout singleton est non vide.
5. ☐ 4 n'a pas d'antécédent pour f.

Troisième partie
Principes de raisonnements

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Définition

Le raisonnement par récurrence est une forme de raisonnement visant à démontrer une propriété portant sur tous les entiers naturels, ou plus généralement sur tous les entiers supérieurs à un entier donné. Le raisonnement par récurrence simple consiste à démontrer séparément les points suivants :
- Une propriété est vérifiée par un entier k (par exemple 0 ou 1) : c'est l'**initialisation** de la récurrence
- Si la propriété est vérifiée par un entier, alors elle doit être vérifiée par son successeur, c'est-à-dire, l'entier qui le suit : il s'agit de l'**hérédité**.

Une fois cela établi, on en déduit que la propriété est vraie pour tous les entiers supérieurs à k.

Remarque 1.1 : Le raisonnement par récurrence établit une propriété importante liée à la structure des entiers naturels : celle d'être construits à partir de 0 en itérant le passage au successeur.

On peut formaliser le raisonnement par récurrence simple de la façon suivante :

Définition 1.2 (Raisonnement par récurrence simple) : Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$:

$$[\mathcal{P}(0) \wedge (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)]$$

1.2 Règles de bonne conduite

Pour démontrer une propriété $\mathcal{P}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence, on procède comme suit :
- On dit que l'on démontre $\mathcal{P}$ par récurrence sur n
- On démontre $\mathcal{P}(0)$
- On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est l'**hypothèse de récurrence** (**H.R.**), et l'on démontre que, sous cette hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- On conlue proprement ! Autrement dit, on conclue par une phrase de la forme « La propriété est vraie pour 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ » ou encore « $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\forall n,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ ».

1.3 Exemple

On cherche à démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.

On note $\mathcal{P}$ la propriété définie par $\mathcal{P}(n)$: « $n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ »

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2-1 = 1 = 1^2$

- Soit $n \geq 1$, on suppose (hypothèse de récurrence) que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on souhaite montrer que sous cette hypothèse $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)+(2(n+1)-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2n+1 \\
&= \text{(H.R.) } n^2+2n+1 \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

Donc $\forall n \geq 1,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

La propriété $\mathcal{P}$ est vraie au rang 1 et se transmet du rang n au rang $n+1$, elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

1.4 Récurrence d'ordre k

1.4.1 Récurrence d'ordre 2

Définition 1.3 (Raisonnement par récurrence d'ordre 2) : Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$:

$$[\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge ((\mathcal{P}(n-1) \wedge \mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)]$$

1.4.2 Récurrence d'ordre k

Définition 1.4 (Raisonnement par récurrence d'ordre k) : Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$:

$$\left[\bigwedge_{i=0}^{k-1} \mathcal{P}(i) \wedge \left(\bigwedge_{i=0}^{k-1} \mathcal{P}(n-i) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\right)\right] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)]$$

Remarque 1.5 : Il faut bien prendre garde au fait que l'initialisation d'une démonstration par récurrence d'ordre $k > 1$ n'est pas constituée uniquement de la vérification de $\mathcal{P}(0)$ mais de $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ et ... et $\mathcal{P}(k-1)$!

1.5 Récurrence forte

Il est parfois nécessaire, dans des raisonnements par récurrence, d'utiliser une version plus forte pour l'hérédité.

Définition 1.6 (Raisonnement par récurrence forte) : Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$:

$$[\mathcal{P}(0) \wedge ((\forall k \leq n,\ \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)]$$

1.6 Exercices

▷ *Exercice 1.7 :* Démontrez par récurrence les assertions suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1) = (n+1)(n+2)/2$
2. $\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
3. $\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4$
4. $\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad 3|(n^3-n)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}-1$
6. $\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1}+2$

Quatrième partie
Arithmétique

À compléter

Cinquième partie
Structures

1 Structures algébriques usuelles

1.1 Loi de composition interne

1.2 Groupes

1.3 Morphismes

1.4 Anneaux

1.5 Corps

2 Espaces vectoriels

2.1 Espace vectoriel réel

2.2 Combinaison linéaire de vecteurs

2.3 Espace vectoriel de dimension finie

2.4 Somme de sous-espaces

Sixième partie
Nombres complexes

1 L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

1.1 Définitions

1.2 Opérations sur $\mathbb{C}$

2 Conjugé, module et argument

2.1 Nombre conjugué d'un nombre complexe

2.2 Module et argument d'un nombre complexe

2.3 Forme trigonométrique et notation exponentielle $\rho e^{i\theta}$

3 Géométrie

3.1 Interprétation géométrique d'un nombre complexe

3.2 Formule de Moivre

3.3 Racine n^{ième} d'un nombre complexe

Septième partie

Dérivation

1 Dérivation d'une fonction d'une variable réelle

On désigne par I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Sans mention explicite, f désigne une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si l'accroissement

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad h \neq 0$$

admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est alors notée $f'(a)$ et s'appelle le nombre dérivé de f en a.

Si f est dérivable en tous les points de I, on dit que f est dérivable sur I.

Si f est dérivable sur I, la fonction qui à tout réel x de I associe le réel $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f sur I et notée f'.

Une notion importante est celle de fonction de classe C^k.

Définition 1.2 :

1. Une fonction f est de classe C^1 sur I ssi elle vérifie les deux points suivants :
   - f est dérivable sur I
   - Sa dérivée f' est continue sur I
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une fonction f est de classe C^k sur I ssi
   - f est k fois dérivable
   - La dérivée k-ième de f est continue

Rappellons quelques résultats de base pour les fonctions dérivables.

Théorème 1.3 (Théorème de Rolle) :
Soient deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que :

$$f(a) = f(b).$$

Alors il existe (au moins) un élément c de $]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = 0.$$

Proposition 1.4 (Théorème des accroissements finis) :
Soient deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

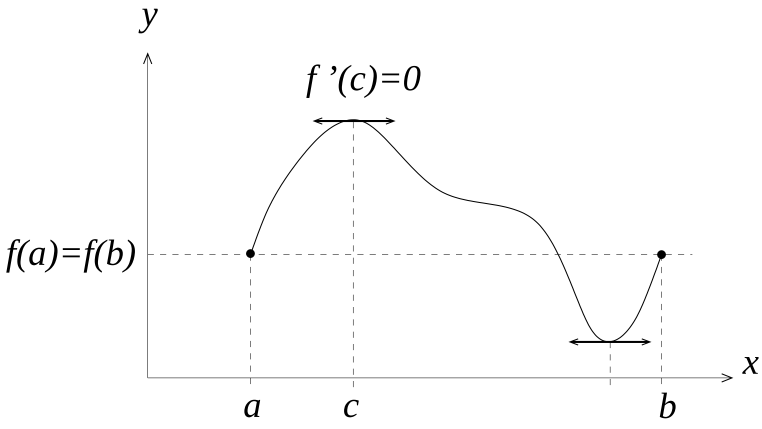


Fig. 1 – Illustration du théorème de Rolle

Pour établir le Théorème des accroissements finis, il suffit d'appliquer le Théorème de Rolle à la fonction $x \mapsto f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \times (x-a)$.

2 Notations de Landau et "algèbre" associée

La notation de Landau $\mathcal{O}$ ("grand O") est un symbole utilisé en mathématiques et en informatique (complexité) pour comparer entre-elles la croissance de deux fonctions et pour décrire le comportement asymptotique des fonctions.

Définition 2.5 : Pour deux fonctions f et g à valeurs réelles, on écrit

$$f = \mathcal{O}(g) \quad \text{(ou bien en précisant } \ f = \mathcal{O}(g) \ \text{ quand } \ x \to \infty)$$

si et seulement s'il existe des constantes N et $C > 0$ telles que

$$\forall x > N, \quad |f(x)| \leq C\,|g(x)|\,.$$

Cela signifie que la fonction f ne croît pas plus vite que g.

De façon plus générale, si a est un nombre réel, on écrit

$$f = \mathcal{O}(g) \ \text{ quand } \ x \to a$$

si et seulement s'il existe des constantes $d > 0$ et $C > 0$ telles que

$$\forall x, \quad |x-a| < d \implies |f(x)| \leq C\,|g(x)|\,.$$

Exemple 2.6 : En analysant la complexité d'un algorithme, on trouve que le nombre d'étapes (opérations) nécessaire pour résoudre un problème de taille n est donné par $T(n) = 5n^3 - 4n + 16$. On a alors $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$. Autrement dit, lorsque n est grand, T croît comme n^3. Ainsi, si on double la taille n du problème, on multiplie par $2^3 = 8$ (au plus) le nombre d'opérations.

Voici quelques exemples d'ordre de croissance (en fonction d'une variable entière n) couramment rencontrés dans l'analyse de la complexité d'algorithmes :

Ordre	**Complexité**
$\mathcal{O}(1)$	constante
$\mathcal{O}(\log(n))$	logarithmique
$\mathcal{O}(n)$	linéaire
$\mathcal{O}(n\log(n))$	"quasi-linéaire"
$\mathcal{O}(n^2)$	quadratique
$\mathcal{O}(n^p)$	polynomiale
$\mathcal{O}(\alpha^n)$	exponentielle
$\mathcal{O}(n!)$	factorielle

Dans le même esprit, la notation $f(x) = o(g)$ (avec un "petit o") signifie que la fonction f est négligeable devant la fonction g quand x tend vers une valeur particulière.

Définition 2.7 : Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ et f et g deux fonctions à valeurs réelles avec g qui ne s'annule pas dans un voisinage de a. On écrit

$$f = o(g) \quad \text{quand} \quad x \to a$$

si et seulement si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ quand $x \to a$.

Cette notation est particulièrement utile pour les développements limités. Par exemple, $e^x = 1 + x + o(x)$ quand $x \to 0$.

Calcul sur les relations de comparaison
On a les règles suivantes pour la manipulation des notations de Landau :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(g) + \mathcal{O}(g) &= \mathcal{O}(g), \quad && \alpha \cdot \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(g) \\ o(g) + o(g) &= o(g), && \alpha \cdot o(g) = o(g) \end{aligned}$$

On observera que cette écriture est un abus de notation, les symboles $\mathcal{O}(g)$ et $o(g)$ ne représentant pas des fonctions bien définies. En particulier, on retiendra qu'en général $\mathcal{O}(g) - \mathcal{O}(g) \neq 0$! !

De plus, on a

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}(g_1)\mathcal{O}(g_2) = \mathcal{O}(g_1 g_2), \\ &|\mathcal{O}(g)|^\lambda = \mathcal{O}(|g|^\lambda), \quad |o(g)|^\lambda = o(|g|^\lambda) \\ &o(g_1)\mathcal{O}(g_2) = o(g_1 g_2) \ \text{ si } g_2 \text{ ne s'annule pas au voisinage de } +\infty, \end{aligned}$$

3 Formules de Taylor

Proposition 3.8 :

1. **Formule de Taylor-Young**
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable n fois en $a \in I$. On a

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + h^n \varepsilon(h) \quad \text{où } \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

2. **Formule de Taylor-Lagrange**
   Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$, dérivable $n+1$ fois sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$
3. **Formule de Taylor avec reste intégral**
   Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. On a
$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

La formule de Taylor-Young est une formule locale. Elle fournit des informations au voisinage d'un point. Elle permet en particulier d'obtenir des développements limités de fonctions. Les deux autres formules sont globales. La formule de Taylor-Lagrange donne des renseignements sur tout un intervalle. La formule de Taylor avec reste intégral fournit - sous les hypothèses les plus fortes - une expression précise du reste.

4 Développements limités

Un développement limité (D.L.) d'une fonction f au voisinage d'un point consiste à écrire la fonction sous la forme d'un polynôme et d'un reste "petit". Le polynôme de ce développmement fournit alors une approximation (locale) de la fonction.

Définition 4.9 : On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ possède un développement limité d'ordre n en un point $x_0 \in I$, s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tels que $\forall x \in I$:
$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

Exemple 4.10 : Voici quelques D.L. usuels :

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$

$(1+x)^a = 1 + ax + \dfrac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$

$\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

$\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

$\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$

$\arcsin(x) = x + \dfrac{1.x^3}{2.3} + \dfrac{1.3.x^5}{2.4.5} + \cdots + \dfrac{1.3.5.\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2.4.6.\cdots(2n)(2n+1)} + o(x^{2n+2})$

Huitième partie
Algèbre linéaire

1 Espace vectoriel réel

1.1 Définitions

Définition 1.1 : On appelle **espace vectoriel réel** ou espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, tout triplet

$$(E, +_E, \cdot)$$

tel que :

(*i*) E est un ensemble dont les éléments sont appelés **vecteurs**

(*ii*) $+_E$ est une loi de composition interne de E possédant un élément neutre noté 0_E, associative, pour laquelle chaque élément x de E possède un inverse noté $-x$ et commutative, autrement dit telle que, $\forall x, y \in E$:

$$\begin{gathered} x +_E 0_E = x \\ (x +_E y) +_E z = x +_E (y +_E z) \\ x +_E (-x) = 0_E \\ x +_E y = y +_E x \end{gathered}$$

(*iii*) $\cdot$ est une loi externe de $\mathbb{R} \times E$ dans E telle que, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y \in E$:

$$\begin{gathered} \lambda \cdot (x +_E y) = \lambda \cdot x +_E \lambda \cdot y \\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x +_E \mu \cdot x \\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\,\mu) x \\ 1 \cdot x = x \end{gathered}$$

Remarque 1.2 : Les éléments de E sont appelés vecteurs par opposition aux éléments de $\mathbb{R}$ qui sont appelés **scalaires**.

Exemple 1.3 : $(\mathbb{R}^3, +_{\mathbb{R}^3}, \cdot_{\mathbb{R}^3})$ où $+$ est défini par :

$$\begin{array}{rccc} +_{\mathbb{R}^3} : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) & \mapsto & \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \end{array}$$

$\cdot_{\mathbb{R}^3}$ par :

$$\begin{array}{rccc} \cdot_{\mathbb{R}^3} : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \left(\lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) & \mapsto & \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \end{array}$$

est un espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ est $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 1.4 : Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on omet le E en indice de la loi de composition interne $+$, de la loi externe $\cdot$ et de l'élément neutre 0.

Remarque 1.5 : Par abus de langage, on dira que E est un espace vectoriel (sans préciser $+_E$ et $\cdot$).

Définition 1.6 : Soit E un espace vectoriel et $F \subseteq E$, $F \neq \varnothing$. F est un **sous-espace vectoriel** de E ssi $\forall x, y \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot x \in F \text{ et } x +_E y \in F$$

autrement dit, s'il est stable pour les deux lois de E.

Exemple 1.7 : L'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet : soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il faut et il suffit de montrer que $\lambda \cdot u \in E$ et $u + v \in E$.

(i) $\lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix}$. Comme $u \in E$, $u_1 = u_2$, $\lambda u_1 = \lambda u_2$, donc $\lambda \cdot u \in E$.

(ii) $u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$. Comme u et v appartiennent à E, on a $u_1 = u_2$ et $v_1 = v_2$, donc $u_1 + v_1 = u_2 + v_2$. Ainsi, $u + v$ appartient à E.

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.8 : Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

1.2 Combinaison linaire de vecteurs

Définition 1.9 : Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle **combinaison linéaire** de la famille $\{x_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ tout vecteur x tel que

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i = \lambda_1 \cdot x_1 +_E \ldots +_E \lambda_n \cdot x_n$$

Exemple 1.10 : Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Le vecteur $w = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ est une combinaison linaire de u et v. En effet, $w = 1 \cdot u + 2 \cdot v$.

Définition 1.11 : Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de vecteurs d'un espace vectoriel E. L'ensemble des combinaisons linéaires est un sous-espace vectoriel de E noté $vect(\{x_1, \ldots, x_n\})$ et appelé **espace vectoriel engendré par** $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Exemple 1.12 : Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. $vect(\{u, v\})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$.
En effet :

(*i*) si $w \in E$, alors w est de la forme $\begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix}$.
w s'écrit donc sous la forme d'une combinaison linéaire de u et de v :

$$w = a \cdot u + b \cdot v$$

(*ii*) réciproquement, toute combinaison linéaire de u et de v appartient à E :
soient λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ donc appartient à E.

Définition 1.13 : Soit $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que F est une **famille libre** (ou ensemble libre) ssi aucun élément x de F n'est combinaison linéaire de $F \setminus \{x\}$:

$$\forall x \in F,\ x \notin vect(F \setminus \{x\})$$

On dit alors que les vecteurs de F sont **linéairement indépendants**.

Exemple 1.14 : Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Les familles $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ et $\{v, w\}$ sont libres alors que la famille $\{u, v, w\}$ ne l'est pas.

Proposition 1.15 : Soit $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. F est libre ssi

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

▷ **Démonstration :** *Soient* $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *une famille libre de vecteurs et* $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i = 0$. *S'il existe* $k \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $\lambda_k \neq 0$, *alors*

$$x_k = -\frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=1,\ i \neq k}^{n} \lambda_i \cdot x_i = \sum_{i=1,\ i \neq k}^{n} \frac{-\lambda_i}{\lambda_k} \cdot x_i$$

donc $x_k \in vect(F \setminus \{x_k\})$, *ce qui est contradictoire.* ■

Exemple 1.16 : On reprend l'exemple 1.14 et l'on cherche à montrer que $\{u, v\}$ est libre tandis que $\{u, v, w\}$ ne l'est pas. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_2 - 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -1$ est une solution non nulle de ce système, donc $\{u, v, w\}$ n'est pas libre. En revanche, le système :

Définition 1.17 : Si une famille de vecteurs $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**. On dit alors que les vecteurs de F sont **linéairement dépendants**.

Remarque 1.18 : F est une famille liée ssi il existe $F' \subsetneq F$ tel que $vect(F') = vect(F)$.

Définition 1.19 : Soit $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une famille de vecteurs. On appelle **rang** de F et on note $rang(F)$ ou $rg(F)$ le nombre maximum de vecteurs de F linéairement indépendants, autrement dit le cardinal du plus grand sous-ensemble libre de F :

$$rang(F) = \max\{card(F') \mid F' \subseteq F,\ vect(F') = vect(F)\}$$

Exemple 1.20 : Si l'on reprend l'exemple précédent,

Remarque 1.21 : On dit que la famille $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est de plein rang ssi $rang(F) = card(F)$, autrement dit si F est libre.

1.3 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 1.22 : Soit E un espace vectoriel. On dit que E est de **dimension finie** ssi il existe une famille de vecteurs $\mathcal{B}$ telle que :

(*i*) $card(\mathcal{B})$ est fini

(*ii*) $E = vect(\mathcal{B})$

(*iii*) $\mathcal{B}$ est libre

On dit alors que $\mathcal{B}$ est une **base** de E et $card(\mathcal{B})$ est la **dimension** de E, notée $dim(E)$.

Exemple 1.23 : Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$. Les familles suivantes sont des bases de E :

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Alors que $\mathcal{B}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\mathcal{B}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ne sont pas des bases de E. $\mathcal{B}_5$ est liée et $\mathcal{B}_6$ n'engendre pas E.

Remarque 1.24 : De manière équivalente, $\mathcal{B}$ est une base de E ssi

$$vect(\mathcal{B}) = E \quad \text{et} \quad \nexists \mathcal{B}' \subsetneq \mathcal{B}, \ vect(\mathcal{B}') = E$$

Remarque 1.25 : Soit E un espace-vectoriel et F une famille de vecteurs de E telle que $vect(F) = E$. On a alors $dim(E) = rang(F)$ (si F est libre, alors F est une base de E et l'on retrouve $dim(E) = card(F)$).

Remarque 1.26 : On dit que E est un espace vectoriel **nul** (ou **trivial**) ssi il est uniquement composé du vecteur nul $\{0_E\}$. Par convention, la dimension d'un tel espace est nulle et sa base est l'ensemble vide $\varnothing$.

Remarque 1.27 : Tout espace vectoriel E de dimension finie et non nul possède une infinité de bases de E, toutes de même cardinal égal à $dim(E)$.

Définition 1.28 : Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie et $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ une base de E. Comme $vect(\mathcal{B}) = E$, tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$, autrement dit :

$$\forall x \in E, \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \ x = \lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_n \cdot b_n$$

Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les **coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$**.

Remarque 1.29 : Si x est un vecteur de E, $\mathcal{B}$ une base de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, on note $x_{/\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. On ne précise pas $\mathcal{B}$ dans $x_{/\mathcal{B}}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Proposition 1.30 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Toute famille libre F de n vecteurs de E est une base de E.

1.4 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 1.31 : Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** de F et G et on note $F+G$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $F \cup G$:

$$F + G = vect(F \cup G) = \{x \in E \mid \exists y \in F,\ z \in G,\ x = y + z\}$$

il s'agit de l'ensemble des vecteurs de E qui sont la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Théorème 1.32 : Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a :

$$dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

Définition 1.33 : Si $F \cap G = \{0_E\}$, alors $F+G$ est appelée **somme directe** de F et de G et se note

$$F \oplus G$$

Tout vecteur de $F \oplus G$ s'écrit alors de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Définition 1.34 : Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires** (sous-entendu dans E) ssi $E = F \oplus G$.

2 Applications linéaires

2.1 Définitions

Définition 2.1 : On appelle **application linéaire** ou **homomorphisme** d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F tout application

$$F : E \to F$$

telle que
On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemple 2.2 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}$$

f est une application linéaire (homomorphisme) de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Définition 2.3 : Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même ($f \in \mathcal{L}(E, E)$ ou plus simplement $\mathcal{L}(E)$) est appelée **endomorphisme** de E.

Exemple 2.4 : L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 3 \cdot y - x \end{pmatrix}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, *i.e.* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Définition 2.5 : Une application linéaire bijective d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est appelée **isomorphisme** de E dans F.

Exemple 2.6 : Soient $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 \cdot x \right\}$ et $F = \mathbb{R}^2$.
L'application $f : E \to F$ définie par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de E dans F.

Définition 2.7 : Soient E et F deux espaces vectoriels. E et F sont dits **isomorphes** ssi il existe un isomorphisme de E dans F.

Proposition 2.8 : Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes ssi ils sont de même dimension.

Exemple 2.9 : Soient E et F les deux espaces vectoriels définis dans l'exemple précédent. E et F sont isomorphes donc :

Définition 2.10 : Un endomorphisme bijectif est appelé **automorphisme**.

Exemple 2.11 : L'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \\ x+z \\ 2 \cdot t \end{pmatrix}$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Définition 2.12 : Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **image** de E par f (ou image de f) et l'on note $Im(f)$ l'ensemble de toutes les images des éléments de E par f :
$Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exemple 2.13 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 2 \cdot y \end{pmatrix}$$

$Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \cdot \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2.2 Propriétés

Dans cette section, on considère une application linéaire quelconque f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.

Proposition 2.14 : L'image du vecteur nul de E est le vecteur nul de F : $f(0_E) = 0_F$.

Proposition 2.15 : $\forall x_1, \ldots, x_n \in E,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 +_E \ldots +_E \lambda_n \cdot x_n) = \lambda_1 \cdot f(x_1) +_F \ldots +_F \lambda_n \cdot f(x_n)$$

Remarque 2.16 : Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F et si B est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 2.17 : Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Remarque 2.18 : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

2.3 Noyau, rang

Définition 2.19 : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle **rang de** f et on note $rang(f)$ ou $rg(f)$ la dimension de l'espace vectoriel image de f :

Exemple 2.20 : Si l'on reprend l'exemple 2.13,

Définition 2.21 : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle **noyau de** f et on note $ker(f)$ le sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul 0_F :

Remarque 2.22 : La notation *ker* vient de *kernel* qui signifie *noyau* en anglais.

Exemple 2.23 : En reprenant toujours l'exemple 2.13, on a :
Donc

Théorème 2.24 : Théorème du rang.
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

$$dim(E) = \underbrace{dim(Im(f))}_{rang(f)} + dim(Ker(f))$$

ce que l'on peut également noter :

Exemple 2.25 : En reprenant toujours l'exemple 2.13, on a :
- $dim(E) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- $rang(f) = 1$
- $dim(Ker(f)) = 2$

Le théorème du rang est donc bien vérifié.

Proposition 2.26 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est injective ssi son noyau est réduit au vecteur nul :

$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad ker(f) = \{0_E\}$$

Exemple 2.27 : L'homomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot y \\ x + y \\ x \end{pmatrix}$$

est injectif. En effet :

Proposition 2.28 : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a les propriétés suivantes :

(i) f injective $\Leftrightarrow$ $rang(f) = dim(E)$

(ii) f surjective $\Leftrightarrow$ $rang(f) = dim(F)$

(iii) f bijective $\Leftrightarrow$ $rang(f) = dim(E) = dim(F)$

Remarque 2.29 : On en déduit que f est bijective ssi elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

(i) f injective et $dim(E) = dim(F)$

(ii) f surjective et $dim(E) = dim(F)$

2.4 Image d'une base

Proposition 2.30 : Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors f est entièrement déterminée par l'ensemble $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$, autrement dit, il suffit de connaître la valeur de f pour chaque élément d'une base de E pour connaître la valeur de f pour tout x de E.

▷ **Démonstration :** *Si* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *est une base de* E*, alors tout élément* x *de* E *s'écrit sous la forme* $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$ *et* $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(e_i)$. ■

Exemple 2.31 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + y, z - x)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^3$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a :

Soit $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. x peut s'écrire dans la base $\mathcal{B}$: $x = 2 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3$. Pour calculer $f(x)$, nous n'avons plus besoin de la définition de f, il suffit d'écrire :

Proposition 2.32 : Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On a la propriété suivante :

$$f(\mathcal{B}) \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est bijective.}$$

Exemple 2.33 :
Soient $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = y \right\}$ deux espaces vectoriels ainsi qu'une application linéaire $f : E \to F$ définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

La base la « plus simple » de E est $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. L'image de $\mathcal{B}$ par f est :
$vect(\mathcal{B}')$

En conséquence, f est un isomorphisme.

2.5 Projecteur

Définition 2.34 : Soient E un espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = E_1 \oplus E_2$. $\forall x \in E,\ \exists!\,(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\ x = x_1 + x_2$. Les deux applications linéaires :

$$p_1 \;:\; \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_1 \end{array} \quad \text{et} \quad p_2 \;:\; \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_2 \end{array}$$

sont appelées respectivement **projecteur** de E sur E_1 parallèlement à E_2 et projecteur de E sur E_2 parallèlement à E_1.

Proposition 2.35 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, E)$. f est un projecteur ssi f est idempotent, *i.e.* ssi $f \circ f = f$. f est alors le projecteur sur $Im(f)$ parallèlement à $ker(f)$.

2.6 Exercices

▷ *Exercice 2.36 :* Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes ?

1. ☐ Un automorphisme est un isomorphisme.
2. ☐ Si E est de dimension finie, deux applications linéaires $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ sont égales ssi elles coïncident pour chaque vecteur d'une base de E.
3. ☐ $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

▷ *Exercice 2.37 :* Précisez si les applications suivantes sont linéaires ou non :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, y + z, z - 1) \end{array} \qquad g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, m) \end{array}$$

où m est un réel quelconque.

▷ *Exercice 2.38 :* Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f : (x, y, z) \mapsto (ax + y, y + az)$$

où a est un réel quelconque. Montrez que f est linéaire et déterminer son noyau.

▷ *Exercice 2.39 :* Soit $E = \mathbb{R}^2$. On pose $F = vect(e_1)$ et $G = vect(e_2)$ où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Que vaut $F \cup G$? Est-ce un sous-espace vectoriel de E ?

▷ *Exercice 2.40 :* L'application suivante de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ est-elle un automorphisme :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ x - z \\ -t \end{pmatrix}$$

▷ *Exercice 2.41 :* Déterminez le rang de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ suivante :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + z \\ y - x \\ z + y \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$$

3 Calcul matriciel

3.1 Matrices et applications linéaires

Définition 3.1 : On appelle **matrice** réelle à m lignes et n colonnes (ou de format $m \times n$) un tableau de la forme :

$$A = (a_{i,j})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \textit{ligne 1} \\ \leftarrow \textit{ligne 2} \\ \vdots \\ \leftarrow \textit{ligne m} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & & & \uparrow \\ \textit{colonne 1} & & & \textit{colonne n} \end{array} & \end{array}$$

$a_{i,j}$ est le terme de la matrice A situé à la i^e ligne et à la j^e colonne.

Définition 3.2 : L'ensemble des matrices réelles de format $m \times n$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Exemple 3.3 : Soit une matrice A de format 2×3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 10 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $a_{2,1} = 10$.

Remarque 3.4 : On dit qu'une matrice de format $m \times n$ est :
- carrée (d'ordre n) ssi $m = n$,
- une matrice colonne ssi $n = 1$,
- une matrice ligne ssi $m = 1$.

Définition 3.5 : Soient n vecteurs réels $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$. On note

$$(v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_n)$$

la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont la colonne j est égale à v_j pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

Exemple 3.6 : Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

$$A = (v_1 \mid v_2 \mid v_3)$$

Définition 3.7 : Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions finies respectives n et m et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. La proposition 2.30 a montré que si $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E, alors f est entièrement définie par l'image de $\mathcal{B}$:

$$f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$$

Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)$ une base de F. Tout élément de F s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}'$, en particulier $f(e_i)$ quelque soit $i \in [\![1,n]\!]$:

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(i)} \cdot \varepsilon_j$$

si l'on note $\lambda^{(i)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(i)} \\ \vdots \\ \lambda_m^{(i)} \end{pmatrix}$, alors on appelle **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** la matrice définie par :

$$\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = (\lambda^{(1)} \mid \lambda^{(2)} \mid \ldots \mid \lambda^{(n)})$$

Exemple 3.8 : Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2 \cdot y - z \\ 3 \cdot x + z \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{B}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ avec $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. On a :

Exemple 3.9 :
Soient $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = y \right\}$ deux espaces vectoriels ainsi qu'une application linéaire $f : E \to F$ définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x + z \\ x - z \\ x - z \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E et $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ une base de F. On a :

3.2 Opérations sur les matrices

Définition 3.10 : Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont égales et on note $A = B$ ssi $\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]\,,\ a_{i,j} = b_{i,j}$.

Définition 3.11 : Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On définit la matrice $A + B = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]\,,\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Définition 3.12 : Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la matrice $\lambda \cdot A = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]\,,\ c_{i,j} = \lambda \cdot a_{i,j}$$

Définition 3.13 : Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit la matrice $A \times B = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]\,,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j}$$

Remarque 3.14 : Si A est la matrice d'une application linéaire f et B celle d'une application linéaire g, alors $A \times B$ est la matrice de l'application linéaire $f \circ g$.

Remarque 3.15 : Le produit de matrices n'est pas commutatif, *i.e.* $A \times B \neq B \times A$ en général.

Exemple 3.16 : Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 10 & -2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. La matrice $A \times B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est définie comme suit :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times 2 \\ 10 \times 1 - 2 \times 3 + 7 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.17 : Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Définition 3.18 : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On appelle **transposée** de A et on note $A^\top$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{i,j}^\top = a_{j,i}$$

pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$.

Exemple 3.19 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 10 & -2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
$A^\top$ est alors définie par : $A^\top = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

Remarque 3.20 : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$:

(*i*) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$

(*ii*) $(A \times B)^\top = B^\top \times A^\top$

Définition 3.21 : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On appelle rang de A et on note $rg(A)$ ou $rang(A)$ le rang de la famille de vecteurs constituée des vecteurs colonnes de A (ou des vecteurs lignes de A).

Exemple 3.22 : Soit $A = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 2 \\ -5 & 2 & 18 \end{pmatrix}$.

Remarque 3.23 :
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ rang(A) \leq \min(m,n)$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ rang(A) = rang(A^\top)$
- $rang(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ est la matrice nulle

3.3 Matrices carrés

Définition 3.24 : L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 3.25 : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

Définition 3.26 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle diagonale de A la famille de réels $\{a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}\}$.

Définition 3.27 : Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **diagonale** ssi

$$\forall i \neq j \in [\![1, n]\!]\,,\ a_{i,j} = 0$$

Exemple 3.28 :

Définition 3.29 : Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **triangulaire inférieure** ssi

$$\forall i > j \in [\![1, n]\!]\,,\ a_{i,j} = 0$$

et **triangulaire supérieure** ssi

$$\forall i < j \in [\![1, n]\!]\,,\ a_{i,j} = 0$$

On note $\mathcal{T}^-(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{T}^+(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices triangulaires inférieures (respectivement supérieures).

Exemple 3.30 :

Définition 3.31 : On appelle **matrice unité d'ordre** n et on note I_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

(i) $\forall i \neq j \in [\![1,n]\!]\,,\ a_{i,j} = 0$

(ii) $\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ a_{i,i} = 1$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.32 : I_n est l'élément neutre du produit matriciel :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A \times I_n = I_n \times A = A$$

Définition 3.33 : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **trace de** A et on note $tr(A)$ ou $trace(A)$ la quantité définie par :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Exemple 3.34 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a :

Définition 3.35 : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **symétrique** ssi $A^\top = A$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.

Exemple 3.36 :

Définition 3.37 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite **régulière** ou **inversible** ssi

$$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A \times B = B \times A = I_n$$

B est alors appelée **inverse** de A et est noté A^{-1}. On note $\mathcal{G}L_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n.

Exemple 3.38 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
En effet :

Remarque 3.39 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est bijective ssi la matrice de f (dans n'importe quelle base de E) est inversible.

3.4 Changement de base

Définition 3.40 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ deux bases de E. Tout élément de $\mathcal{B}$ s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}'$, donc quelque soit $i \in [\![1, n]\!]$:

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(i)} \cdot \varepsilon_j$$

si l'on note $\lambda^{(i)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(i)} \\ \vdots \\ \lambda_n^{(i)} \end{pmatrix}$ les coordonnées de e_i dans la base $\mathcal{B}'$, alors on appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$** la matrice définie par :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = (\lambda^{(1)} \mid \lambda^{(2)} \mid \ldots \mid \lambda^{(n)})$$

Cette matrice est inversible et $\mathcal{P}^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.

Remarque 3.41 : Soit x un vecteur de l'espace vectoriel E dont $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases. Si $x_{/\mathcal{B}}$ et $x_{/\mathcal{B}'}$ représentent respectivement les coordonnées de x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors :

$$x_{/\mathcal{B}'} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times x_{/\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad x_{/\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \times x_{/\mathcal{B}'}$$

Remarque 3.42 : Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ trois bases d'un même espace vectoriel E. On a la relation suivante :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$$

Exemple 3.43 : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $e_1 = 3/4 \cdot \varepsilon_1 + 1/4 \cdot \varepsilon_2 + 1/2 \cdot \varepsilon_3$
- $e_2 = 1/4 \cdot \varepsilon_1 + 3/4 \cdot \varepsilon_2 + 1/2 \cdot \varepsilon_3$
- $e_3 = 1/2 \cdot \varepsilon_1 + 1/2 \cdot \varepsilon_2$

Donc

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que : $x_{/\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$, *i.e.* $x_{/\mathcal{B}'}$,

sont déterminées par :

Définition 3.44 : Changement de base pour une application linéaire.
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F. On a la relation suivante :

$$\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'} \cdot \mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$$

En particulier, si $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}'} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \cdot \mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$$

Définition 3.45 : Deux matrices M et $M' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ sont dites **équivalentes** ssi

$$\exists P_1 \in \mathcal{G}L_m(\mathbb{R}),\ P_2 \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{R}),\ M' = P_1 \cdot M \cdot P_2$$

Remarque 3.46 : Deux matrices sont équivalentes ssi elles représentent une même applications linéaires dans des bases différentes.

Proposition 3.47 : Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang.

Définition 3.48 : Deux matrices M et $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **semblables** ssi

$$\exists P \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{R}),\ M' = P \cdot M \cdot P^{-1}$$

Remarque 3.49 : Deux matrices sont semblables ssi elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

3.5 Déterminant

Définition 3.50 (Déterminant d'une matrice carrée) : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **déterminant de** A et on note $det(A)$ ou $|\,A\,|$ la quantité définie par :
- si $n = 1$, $det(A) = a_{1,1}$
- si $n = 2$, $det(A) = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{2,1} \times a_{1,2}$
- si $n \geq 2$, pour un $j \in [\![1, n]\!]$ fixé,

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \times a_{i,j} \times det\left(A^{(i,j)}\right)$$

où $A^{(i,j)}$ est la matrice A privée de la i^e ligne et la j^e colonne. Ce calcul du déterminant est appelé « développement selon la j^e colonne ». On peut également calculer $det(A)$ en le développant par rapport à la i^e ligne :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \times a_{i,j} \times det\left(A^{(i,j)}\right)$$

Remarque 3.51 : Ceci n'est pas la véritable définition du déterminant mais la définition d'une méthode de calcul du déterminant.

Exemple 3.52 : $SoitA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 3.53 : Le déterminant possède les propriétés suivantes :

(i) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ det(A) = det(A^\top)$.

(*ii*) Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure, inférieure ou, a fortiori, diagonale) est égal au produit de ses éléments diagonaux.

(*iii*) Si l'on permute deux lignes (ou deux colonnes) d'une matrice, alors on multiplie son déterminant par -1.

(*iv*) Si l'on multiplie une ligne (ou une colonne) par $\lambda \in \mathbb{R}$, alors son déterminant est multiplié par λ.

(*v*) Le déterminant d'une matrice reste inchangée si l'on ajoute à une ligne (resp. colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes).

(*vi*) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ det(A \times B) = det(A) \times det(B)$.

(*vii*) Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

Proposition 3.54 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est inversible ssi elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(*i*) $det(A) \neq 0$

(*ii*) l'application linéaire f associée à A est bijective

(*iii*) $rang(A) = n$

(*iv*) les vecteurs lignes de A sont linéairement indépendantes

(*v*) les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendantes

et alors :

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Définition 3.55 (Déterminant d'un endomorphisme) : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le déterminant de f, noté $det(f)$ est le déterminant de la matrice de f dans n'importe quelle base de E.

Exemple 3.56 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'application linéaire définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \cdot x - y \\ 7 \cdot x \end{pmatrix}$$

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

Remarque 3.57 : La proposition 3.54 nous permet d'affirmer qu'une famille de vecteurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est libre ssi $det(\, x_1 \,|\, \ldots \,|\, x_n \,) \neq 0$.

3.6 Réduction des endomorphismes

Définition 3.58 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **vecteur propre** de f tout vecteur non nul $x \in E$, tel que :
Le scalaire λ est appelé **valeur propre** de f associé à x.

Définition 3.59 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble des valeurs propres de f est appelé **spectre** de f :

$$Sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists x \in E \setminus \{0_E\},\ f(x) = \lambda \cdot x\}$$

Exemple 3.60 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ un endomorphisme défini par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 6 \cdot y \\ x + 2 \cdot y \end{pmatrix}$$

4 et -1 sont valeurs propres de f associées respectivement aux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. En effet :

Définition 3.61 : Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$. On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel de E formé de tous les vecteurs x tels que $f(x) = \lambda \cdot x$:

$$E_\lambda = Ker(f - \lambda \cdot Id_E)$$

A noter que $\forall \lambda_1 \neq \lambda_2 \in Sp(f),\ E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_E\}$.

Définition 3.62 : On appelle vecteurs propres (resp. valeurs propres) d'une matrice carrée M les vecteurs propres (resp. valeurs propres) de l'endomorphisme associé.

Définition 3.63 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique** de f le polynôme P_f de degré n défini par :

$$P_f(\lambda) = det(M - \lambda \cdot I_n)$$

où M est une matrice de f dans une base de E quelconque. Les valeurs propres de f (ou de M) sont les racines réelles de $P_f(\lambda)$, *i.e.* les solutions réelles de $P_f(\lambda) = 0$.

Exemple 3.64 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ un endomorphisme défini par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 6 \cdot y \\ x + 2 \cdot y \end{pmatrix}$$

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donnée par :
Pour déterminer les valeurs prores et f, il faut et il suffit de résoudre l'équation :

soit

$$(1 - \lambda) \times (2 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Les racines de cette équation sont :

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

avec $\Delta = b^2 - 4ac = 25$, $a = 1$, $b = -3$ et $c = 4$. On obtient alors -1 et 4.

Théorème 3.65 : Cayley-Hamilton.
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, M une matrice de f dans une base de E quelconque et P_f le polynôme caractéristique. M vérifie son équation caractéristique, *i.e.* $P_f(M) = 0$.

Exemple 3.66 : En reprenant l'exemple précédent, on a :

$$P_f(M) = M^2 - 3 \times M - 4 \cdot I_2 = 0$$

Définition 3.67 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Proposition 3.68 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, alors on peut trouver une base $\mathcal{B}^*$ de E formée de vecteurs propres de f. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}^*$ est alors

une matrice diagonale. Si l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées aux vecteurs propres $v_1, \ldots, v_n$, alors
$$P = (\, v_1 \mid \ldots \mid v_n \,)$$
est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}^*$ vers $\mathcal{B}$ et

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}^*$, autrement dit : $\Delta = P^{-1} \times M \times P$.

Définition 3.69 : Un polynôme est dit **scindé** dans $\mathbb{R}$ ssi il est entièrement factorisable dans $\mathbb{R}$: $P(X) = (X - \alpha_1)^{k_1} \times \ldots \times (X - \alpha_p)^{k_p}$ avec $deg(P) = \sum_{i=1}^{p} k_i$. k_i est **l'ordre de multiplicité** de la racine α_i.

Théorème 3.70 : Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et P_f le polynôme caractéristique de f.

(i) Si P_f est scindé sur $\mathbb{R}$ et si les racines de P_f sont toutes d'ordre de multiplicité 1, alors f est diagonalisable.

(ii) Si P_f est scindé sur $\mathbb{R}$ et que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre à laquelle il est associé, alors f est diagonalisable.

(iii) si la matrice de f dans une base quelconque de E est symétrique, alors f est diagonalisable.

Exemple 3.71 : En reprenant l'exemple 3.64, on a

$$P_f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1) \times (\lambda - 4)$$

P_f est donc scindé sur $\mathbb{R}$ et toutes les racines sont d'ordre de multiplicité 1, donc f (resp. M) est diagonalisable. On peut donc trouver une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteur propres de f dans laquelle la matrice de f sera diagonale. On cherche donc les vecteurs propres de f, *i.e.* E_4 et E_{-1} :
De la même façon :

Soit $E_4 = vect\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $E_{-1} = vect\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Une base de $\mathbb{R}^2$ est donc $\mathcal{B}^* = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. La matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ vers la base canonique est :
et la matrice de f dans la base $\mathcal{B}^*$ est :

On peut vérifier que $\Delta = P^{-1} \times M \times P$.

3.7 Exercices

3.7.1 Matrices et applications linéaires

▷ *Exercice 3.72 :* Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ z \\ y+z \end{pmatrix}$$

Déterminez la matrice $\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Donnez ensuite les images par f des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

▷ *Exercice 3.73 :* Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ trois applications linéaires représentées (dans les bases canoniques) par les matrices suivantes :

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminez la représentation matricielle des applications linéaires qui sont définies par les applications suivantes :

$$f+g,\ f+h,\ f-2g,\ f\circ g,\ f\circ h,\ h\circ f,\ g\circ h$$

▷ *Exercice 3.74 :* Déterminez (sans utiliser les déterminants), le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

▷ *Exercice 3.75 :* Déterminez l'inverse de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 2 \end{pmatrix}$$

où a est un réel quelconque.

3.7.2 Déterminants

▷ *Exercice 3.76 :* Calculez les déterminants des matrices suivantes :

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_4=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix},\ A_5=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

▷ *Exercice 3.77 :* Soit A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exprimez $|\,A_n\,|$ en fonction de $|\,A_{n-1}\,|$ et $|\,A_{n-2}\,|$. Déduisez-en $|\,A_n\,|-|\,A_{n-1}\,|$ puis $|\,A_n\,|$.

▷ *Exercice 3.78 :* Soient a,b et c trois réels quelconques. Calculez le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$$

▷ *Exercice 3.79 :* À l'aide des déterminants, indiquez si les vecteurs suivants sont linéairement indépendants :

(i) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ii) $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3.7.3 Diagonalisation

▷ *Exercice 3.80 :* Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Trouver une base $\mathcal{B}^*$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale.

▷ *Exercice 3.81 :* Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(R)$$

Trouver une base $\mathcal{B}^*$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de g est une matrice diagonale.

4 Équations linéaires

4.1 Définitions

Définition 4.1 : On appelle **système de m équation à n inconnues** tout ensemble de m équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 & + & a_{1,2} \cdot x_2 & + & \dots & + & a_{1,n} \cdot x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} \cdot x_1 & + & a_{m,2} \cdot x_2 & + & \dots & + & a_{m,n} \cdot x_n & = & b_m \end{cases}$$

Les réels $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients** du système et les réels b_i sont les **seconds membres**. On appelle **solution** de ce système tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant les m équations du système. Tout système peut s'exprimer sous forme matricielle :

$$A \cdot x = b$$

où $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

Définition 4.2 : Le système d'équations $A \cdot x = b$ est dit **homogène** ssi $b = 0_m$.

Remarque 4.3 : Tout système d'équations homogène admet au moins une solution triviale $x = 0_n$.

Définition 4.4 : On appelle **rang** du système d'équations $A \cdot x = b$ le rang de la matrice A.

Définition 4.5 : Le système d'équations $A \cdot x = b$ où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un système **de Cramer** ssi $m = n = rang(A)$. Dans ce cas, $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et le système admet une unique solution : $x = A^{-1} \cdot b$.

Remarque 4.6 : Soit $A \cdot x = b$ un système de Cramer. Si on note $A = (\, v_1 \,|\, \dots \,|\, v_n \,)$, alors la solution $x = (x_1, \dots, x_n)$ du système est donnée par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \,,\ x_i = \frac{D_i}{det(A)}$$

où $D_i = det(\, v_1 \,|\, \dots \,|\, v_{i-1} \,|\, b \,|\, v_{i+1} \,|\, \dots \,|\, v_n \,)$.

4.2 Méthode de Gauss

Définition 4.7 : On appelle **opérations élémentaires sur les matrices** les opérations suivantes :

(i) la permutation de deux lignes (resp. colonnes) :

$$L_i \leftrightarrow L_j \text{ (resp. } C_i \leftrightarrow C_j)$$

avec $i \neq j$,

(ii) la multiplication d'une ligne (resp. colonne) par un scalaire λ non nul :

$$L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i \text{ (resp. } C_i \leftarrow \lambda \cdot C_i)$$

(iii) ajout d'un multiple d'une autre ligne (resp. colonne) :

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda \cdot L_j \text{ (resp. } C_i \leftarrow C_i + \lambda \cdot C_j)$$

Définition 4.8 : Soit $A \cdot x = b$ un système de Cramer. Résoudre ce système par la méthode de Gauss consiste à appliquer une succession d'opérations élémentaires sur les lignes de A jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure et appliquer les mêmes opérations sur le vecteur b. On obtient ainsi un système triangulaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a'_{1,1} \cdot x_1 & + & a'_{1,2} \cdot x_2 & + & \dots & + & a'_{1,n} \cdot x_n & = & b'_1 \\ & & a'_{2,2} \cdot x_2 & + & \dots & + & a'_{2,n} \cdot x_n & = & b'_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a'_{m,n} \cdot x_n & = & b'_m \end{array}\right.$$

dont le calcul de la solution est élémentaire.

4.3 Exercices

▷ *Exercice 4.9 :* Résoudre à l'aide des déterminants puis par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} -2x - y - 5z = 7 \\ x + y + 3z = -4 \\ 2x - y + 2z = -3 \end{array}\right.$$

▷ *Exercice 4.10 :* Résoudre à l'aide des déterminants puis par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x - y - z - t = -2 \\ x + z = 1 \\ 2x - y + z + t \\ 2y + 5z + 7t = 17 \end{array}\right.$$

5 Espaces euclidiens

5.1 Produit scalaire, norme

Définition 5.1 : Soit E un espace vectoriel réel. On appelle **produit scalaire** sur E tout **forme bilinéaire symétrique définie positive**. Autrement dit, toute application

$$\begin{array}{rcccl} (\cdot\,|\,\cdot) & : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & (\,x\,|\,y\,) \end{array}$$

telle que :

- **(bilinéarité)** les applications $x \mapsto (\,x\,|\,y\,)$ et $y \mapsto (\,x\,|\,y\,)$ sont linéaires
- **(symétrie)** $\forall (x,y) \in E^2,\ (\,x\,|\,y\,) = (\,y\,|\,x\,)$
- **(caractère défini)** $(\,x\,|\,x\,) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0_E$
- **(positivité)** $\forall x \in E,\ (\,x\,|\,x\,) \geq 0$

Exemple 5.2 : Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. L'application :

$$\begin{array}{rcccl} (\cdot\,|\,\cdot) & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & x^\top y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i \end{array}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Il s'agit du produit scalaire usuel.

Définition 5.3 : On appelle **espace euclidien** tout espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Définition 5.4 : Soit E un espace vectoriel réel. On appelle **norme** sur E tout application

$$\begin{array}{rcccl} \|\cdot\| & : & E & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & \|\,x\,\| \end{array}$$

telle que :

- $\forall x \in E,\ \|\,x\,\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0_E$
- $\forall x \in E,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \|\,\lambda \cdot x\,\| = |\,\lambda\,| \cdot \|\,x\,\|$
- **(inégalité triangulaire)** $\forall (x,y) \in E^2,\ \|\,x+y\,\| \leq \|\,x\,\| + \|\,y\,\|$

Remarque 5.5 : Soit $(x,y) \mapsto (\,x\,|\,y\,)$ un produit scalaire sur E. L'application $x \mapsto \sqrt{(\,x\,|\,x\,)}$ est une norme sur E. (On parle de norme associée au produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)$).

Exemple 5.6 : Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire

$$\begin{array}{rcccl} (\cdot\,|\,\cdot) & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i \end{array}$$

L'application définie par :

$$\begin{array}{rcccl} \|\cdot\| & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{(\,x\,|\,x\,)} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \end{array}$$

| est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Il s'agit de la norme usuelle de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 5.7 : Pour toute déclaration d'espace euclidien $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$, on considèrera définie la norme $\|\cdot\|$ associée à $(\cdot\,|\,\cdot)$.

Définition 5.8 : Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. L'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une **distance** sur E.

Proposition 5.9 : Soient $(\cdot\,|\,\cdot)$ un produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. On a les propriétés suivantes :
- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\cdot(x\,|\,y)$
- $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\cdot(x\,|\,y)$
- $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\cdot(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
- $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\cdot(x\,|\,y)$

Définition 5.10 : Soit $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$ un espace euclidien. Un vecteur $x \in E$ est dit **unitaire** ssi $\|x\| = 1$.

5.2 Orthogonalité

Définition 5.11 : Soit $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$ un espace euclidien. Deux vecteurs x et y de E sont dits **orthogonaux** ssi $(x\,|\,y) = 0$. On note alors $x \perp y$.

Remarque 5.12 : Un vecteur x de E est orthogonal à un sous-ensemble F de E (ou un sous-espace vectoriel de E) ssi $\forall y \in F,\ (x\,|\,y) = 0$.

Remarque 5.13 : Deux sous-espace vectoriels F et G de E sont orthogonaux ssi tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre. On note alors $F \perp G$.

Définition 5.14 : Soient $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle **orthogonal de** F et on $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F.

Définition 5.15 : Une famille de vecteurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est dite **orthogonale** ssi $\forall i \neq j \in [\![1, n]\!]\,,\ x_i \perp x_j$.

Définition 5.16 : Une famille de vecteurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est dite **orthonormale** ssi elle est orthogonale et $\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \|x_i\| = 1$.

Théorème 5.17 : Soit une famille orthogonale de vecteurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$. On a :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Définition 5.18 : Soient $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. La projection orthogonale sur F est définie par :

$$\begin{array}{rcrcl} \pi_F & : & E & \to & F \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\, x \,|\, \varepsilon_i \,) \cdot \varepsilon_i \end{array}$$

où $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ est une base orthonormale de F.

Définition 5.19 : Soient $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Pour tout $x \in E$, on appelle **distance de** x **à** F la quantité

$$d(x, F) = \min_{y \in F} \|\, x - y \,\|$$

ce minimum est atteint pour $y = \pi_F(x)$.

Définition 5.20 (Procédé d'orthonormalisation de Schmidt) : Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de E. On peut construire une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E à partir de $\{v_1, \dots, v_n\}$ de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \dfrac{v_1}{\|\, v_1 \,\|} \\ e_k = \dfrac{v_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (\, v_k \,|\, e_i \,) \cdot e_i}{\left\| v_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (\, v_k \,|\, e_i \,) \cdot e_i \right\|} \qquad \forall k \in [\![2, n]\!] \end{array} \right.$$

5.3 Exercices

▷ *Exercice 5.21 :* On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

(*i*) Vérifiez que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

(*ii*) Soient pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $u_i = \dfrac{v_i}{\|\, v_i \,\|}$. Montrez que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

▷ *Exercice 5.22 :* Soient E un espace vectoriel muni du produit scalaire

$$\begin{array}{rcrcl} (\,\cdot\,|\,\cdot\,) & : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & x^\top y \end{array}$$

et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. On note M la matrice de f dans une base quelconque de E.

(*i*) Montrez que
$$(\, f(u) \,|\, v \,) = (\, u \,|\, f(v) \,)$$

(*ii*) Déduisez de la question précédente que deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres disctinctes sont orthogonaux.

▷ *Exercice 5.23 :* Soit E un espace vectoriel muni du produit scalaire usuel ainsi que F un hyperplan vectoriel de E. On cherche à déterminer, de deux manières différentes, l'application linéaire p qui à tout $x \in E$ associe le projeté orthogonal de x sur F. p est appelé le projecteur orthogonal (ou opérateur de projection orthogonale) sur F.
Méthode 1 :

(*i*) Montrez que si n est orthogonal à un ensemble de vecteurs $e_1, \ldots, e_p$, alors n est orthogonal à $vect\,\{e_1, \ldots, e_p\}$.

(*ii*) Soit n un vecteur de norme 1 orthogonal à F ($E = n \oplus F$). On note $d(x)$ la projection de x sur la droite engendrée par n. Exprimez x en fonction de $p(x)$ et $d(x)$.

(*iii*) Exprimez $d(x)$ en fonction de n et de x.

(*iv*) Déduisez des deux questions précédentes une expression de p en fonction de n.

(*v*) Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $F = vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.
Déduisez de la question (*i*) un vecteur orthogonal à F de norme 1.

(*vi*) Déterminez à l'aide des questions précédente la matrice de p dans la base canonique.

Méthode 2 :

(*i*) Déterminez une base orthonormée de F.

(*ii*) Exprimez la définition du projeté orthogonal de $x \in E$ sur F connaissant une b.o.n. de F.

(*iii*) En déduire une la matrice de p dans la base canonique.

Neuvième partie
Suites et séries

1 Suites de nombres réels

L'écriture $(u_n)_{n\geq n_0}$ désigne la suite de terme général u_n pour $n \geq n_0$. On notera parfois la suite simplement (u_n). L'écriture u_n désigne un nombre réel pour n fixé.

1.1 Suite monotone, bornée.

Définition 1.1 (Monotonie d'une suite réelle) :
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **croissante** si $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **décroissante** si $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$.
- Une suite de nombres réels est **monotone** si elle est croissante **ou** décroissante.

Définition 1.2 (Suite bornée) :
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **majorée** s'il existe une constante M telle que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **minorée** s'il existe une constante m telle que $u_n \geq m$ pour tout $n \geq n_0$.
- Une suite de nombres réels est **bornée** si elle est majorée **et** minorée.

1.2 Suite convergente

Une suite de réels converge s'il existe un réel l tel que tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. La définition précise s'énonce de la façon suivante.

Définition 1.3 : Une suite réelle (u_n) converge s'il existe un réel l vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

On dit alors que l est une limite de la suite (u_n) ou encore que la suite (u_n) tend ou convergence vers l.

Remarque 1.4 : Une suite qui n'a pas de limite est dite *divergente*. Parmi les suites divergentes, il y a celles qui dont les termes u_n sont aussi grands qu'on veut dès que n est choisi assez grand :

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_n \geq A,\ \forall n \geq N.$$

On dit que (u_n) tend vers $+\infty$.

Théorème 1.5 : Si une suite (u_n) converge alors la limite l est unique et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ou bien $u_n \to l$.

1.3 Suite extraite

Une suite extraite d'une suite (u_n) est une suite fabriquée à partir de (u_n) en sélectionnant certains termes. Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition 1.6 : Soit (u_n) une suite et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. La suite $(u_{f(n)})$ s'appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de (u_n).

Théorème 1.7 : Toute suite extraite d'une suite convergente vers l est elle-même convergente vers l.

Théorème 1.8 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) :
Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

1.4 Théorèmes de convergence

Théorème 1.9 :
Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) est convergente.

Théorème 1.10 (Théorème des gendarmes) :
Si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l et si $u_n \leq w_n \leq v_n$ pour tout n, alors (w_n) converge vers l.

1.5 Suite arithmétique

Il s'agit d'une suite (u_n) définie à partir de la relation $u_{n+1} = u_n + a \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$, avec $a \in \mathbb{R}$ qui est la raison (donnée) de la suite arithmétique. Une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison a est donnée par $u_n = u_0 + na \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$.

1.6 Suite géométrique

Il s'agit d'une suite (u_n) définie à partir de la relation $u_{n+1} = q\, u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$, avec $q \in \mathbb{R}$ qui est la raison (donnée) de la suite géométrique. Une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est donnée par $u_n = q^n u_0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$.

1.7 Suite arithmético-géométrique

C'est une généralisation des deux cas précédents. Il s'agit d'une suite (u_n) définie à partir de la relation $u_{n+1} = q\, u_n + a \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$, avec q et $a \in \mathbb{R}$ donnés. Cette suite de premier terme u_0 est donnée par $u_n = q^n u_0 + a\dfrac{1-q^n}{1-q} \quad \text{si } q \neq 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$.

1.8 Somme des n premiers entiers

Théorème 1.11 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\quad 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

▷ **Démonstration :** *Ce résultat peut se démontrer directement de la façon suivante : On note* $S = \sum_{k=1}^{n} k$ *et on écrit la somme* S *de deux façons différentes.*

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ S & = & n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \end{array}$$

En sommant les deux relations précédentes, on obtient

$$2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1)$$

d'où le résultat. ■

▷ *Exercice 1.12 :* Montrer le résultat précédent par récurrence sur n.

1.9 Somme des n premiers carrés d'entiers

Théorème 1.13 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

▷ **Démonstration :** *Une démonstration* ***directe*** *possible (c'est-à-dire sans récurrence) est basée sur le calcul d'intégrale. On a*

$$\int_i^{i+1} x^2 dx = i^2 + i + \frac{1}{3}$$

et par conséquent

$$\frac{(n+1)^3}{3} = \int_0^{n+1} x^2 dx = \sum_{i=0}^{n} \int_i^{i+1} x^2 dx = \sum_{i=0}^{n} (i^2 + i + \frac{1}{3}).$$

ce qui permet de conclure connaissant la somme des n *premiers entiers.* ■

Remarque 1.14 : Cette technique se généralise pour établir la somme des n premiers cubes ...

▷ *Exercice 1.15 :* Montrer par récurrence sur n cette fois, le résultat sur la somme des n premiers carrés.

1.10 Somme géométrique

Théorème 1.16 : Pour $q \neq 1$, on a $q^0 + q^1 + \cdots q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

1.11 Suites adjacentes

Définition 1.17 : Deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs réelles sont **adjacentes** si

(i) l'une est croissante et l'autre décroissante,

(ii) $(u_n - v_n) \to 0$

Théorème 1.18 : Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite. De plus, si (u_n) et (u_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante, (v_n) décroissante et l leur limite commune alors on a, pour tout n

$$u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0.$$

Exemple 1.19 : Convergence vers e avec les suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$.

Exemple 1.20 : Moyenne arithmético-géométrique : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ avec $u_n = a > 0$ et $v_n = b > 0$.

2 Séries de nombres réels

2.1 Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On forme une nouvelle suite (S_n) appelée *suite des sommes partielles* :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

On définit la série de terme général u_n à partir des suites (u_n) et (S_n).

Définition 2.21 : On dit que $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ est la somme partielle de la série $\sum u_n$. On dit que la série $\sum u_n$ converge lorsque la suite (S_n) converge. Dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et est appelée somme de la série. Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente.

2.2 Condition nécessaire de convergence

Théorème 2.22 : Soit (u_n) une suite de nombres réels. Si la série $\sum u_n$ converge alors nécessairement $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2.3 Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs

Théorème 2.23 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres **positifs** vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Alors :

1. Si la série $\sum v_n$ est convergente, il en est de même de la série $\sum u_n$.
2. Si la série $\sum u_n$ est divergente, il en est de même de la série $\sum v_n$.

Exemple 2.24 : Convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{2+\sin n}{3^n}$.

2.4 Série géométrique

La série $\sum q^n$ s'appelle série géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.25 : La série géométrique $\sum q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

2.5 Série harmonique

La série $\sum \frac{1}{n}$ s'appelle *série harmonique*.

Théorème 2.26 : La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

▷ **Démonstration :** *Raisonnons par contradiction en supposant que la série converge. Alors dans ce cas, la somme partielle* $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$ *converge et la suite* (S_{2n}) *qui est une suite extraite, converge aussi vers la même limite. Par conséquent la suite* $S_{2n} - S_n$ *doit converger vers* 0*. Or, on a*

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

d'où une contradiction. ■

2.6 Séries de Riemann

Soit $\alpha > 0$. La série de Riemann est définie par $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Théorème 2.27 : La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque 2.28 : On sait calculer explicitement la somme de la série de Riemann pour tout α **pair**. Par exemple $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\ldots$.
Mais, pour α impair, on ne sait rien...

2.7 Conditions suffisantes de convergence pour les séries à termes positifs

Théorème 2.29 (Règle de d'Alembert) :
Soit (u_n) une suite de nombres réels **strictement positifs**.
On suppose que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in [0, +\infty]$. Alors :

1. Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut pas conclure en général.

Remarque 2.30 : La règle de d'Alembert est bien adaptée aux cas où u_n s'exprime à l'aide de produits, en particulier quand u_n contient des puissances ou des factorielles. Par exemples avec $u_n = \frac{a^n}{n}$ $(a > 0)$, ou bien avec $u_n = \frac{n!}{n^n}$ pour $n \geq 1$.

Théorème 2.31 (Règle de Cauchy) :
Soit (u_n) une suite de nombres réels **positifs**.
On suppose que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \in [0, +\infty]$. Alors :

1. Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut pas conclure en général

Remarque 2.32 : La règle de Cauchy n'est bien adaptée qu'aux cas où le terme général u_n contient essentiellement des puissances. Par exemple avec $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ $(n \geq 1)$.

Théorème 2.33 (Règle de Riemann) :
Soit (u_n) une suite de nombres réels **positifs** et a un réel.
On suppose que $\lim_{n\to\infty} n^a u_n = l > 0$. Alors :

1. Si $a > 1$, la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $a < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
3. Si $a = 1$, on ne peut pas conclure en général

Remarque 2.34 : La règle de Riemann est en fait l'application du théorème de comparaison pour les séries à termes positifs avec comme séries de comparaison les séries de Riemann.

Dixième partie

Intégration

1 Intégrale simple

1.1 Définitions

On rappelle la construction de l'intégrale (au sens de Riemann[1]) d'une fonction f à valeurs réelles définie sur un intervalle fermé $[a, b]$. Intuitivement, l'intégrale d'une fonction f est définie à partir de l'ensemble $S = S_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ qui correspond à une région du plan délimitée par la courbe de f, les deux verticales $x = a$ et $x = b$ et l'axe horizontal des abscisses x. La mesure de l'*aire* de S, notée

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

est l'intégrale de a à b de f.

Construisons à présent rigoureusement l'intégrale. On suppose dans tout ce qui suit, que f est une fonction **bornée** sur $[a, b]$.

Définition 1.1 (Subdivision d'un intervalle) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$, notée $\mathcal{A}$, la donnée d'un nombre fini de points $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$ avec

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Définition 1.2 (Sommes de Darboux) :
Soit $\mathcal{A}$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ avec les points $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$.
Pour $1 \leq j \leq n$, on note les nombres réels

$$m_j = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x) \quad \text{et} \quad M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x).$$

On définit alors la *somme de Darboux inférieure* associée à la subdivision $\mathcal{A}$

$$S_n^-(f) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) m_j$$

et la *somme de Darboux supérieure*

$$S_n^+(f) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) M_j$$

L'intégrale de f est construite à partie de ses sommes de Darboux.

[1] il existe d'autres intégrales, celle de Lebesgue par exemple.

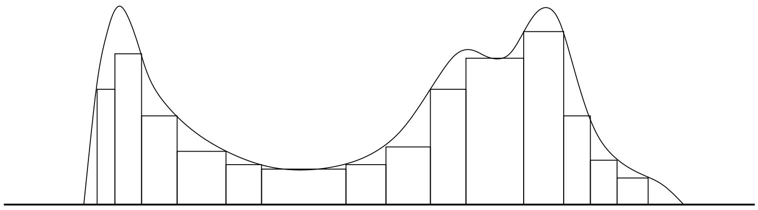


FIG. 2 – Procédé de construction de l'intégrale de Riemann

Définition 1.3 (Intégrale) :
On dira que la fonction f est *intégrable (au sens de Riemann)* sur l'intervalle $[a, b]$ si pour toute subdivision, on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^-(f) = \lim_{n\to+\infty} S_n^+(f)$$

On définit alors l'*intégrale* de f sur $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n^-(f) = \lim_{n\to+\infty} S_n^+(f)$$

1.2 Propriétés

Proposition 1.4 :

1. **linéarité.**
   L'ensemble des fonctions intégrables sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions bornées sur $[a, b]$: soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a
   $$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\;dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$
2. **relation de Chasles.**
   Soit $c \in]a, b[$. La fonction f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si elle est intégrable sur $[a, c]$ et sur $c, b]$. Dans ce cas, on a alors la relation
   $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Proposition 1.5 : parité
Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $[-a, a]$ centré en 0 ($a > 0$).

- si f est paire, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$
- si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

Proposition 1.6 :

1. **positivité.**
Si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors on a :
   - $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
   - $|f|$ est intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ et on a
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$
2. **croissance.**
Si f et g sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors on a
$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$
3. **inégalité de Cauchy-Schwarz**
Si f et g sont des fonctions continues sur $[a,b]$, on a :
$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$

1.3 Critères d'intégrabilité

Théorème 1.7 (Conditions suffisantes d'intégrabilité) :

1. Si f est une fonction monotone sur l'intervalle $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$.
2. Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$.

Ces conditions d'intégrabilité peuvent être étendues aux fonctions monotones ou continues par morceaux seulement.

Définition 1.8 : Une fonction f est monotone par morceaux sur l'intervalle $[a,b]$ s'il existe une subdivision de $[a,b]$ telle que f soit monotone sur chaque sous-intervalle de la subdivision.

Comme conséquence de la relation de Chasles et de l'intégrabilité des fonctions monotones, on a le résultat suivant.

Théorème 1.9 : Toute une fonction f monotone par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.

Définition 1.10 : Une fonction continue par morceaux sur un intervalle est une fonction continue sauf en un nombre fini de points où elle admet une limite à droite et une limite à gauche.

Comme conséquence de la relation de Chasles et de l'intégrabilité des fonctions continues, on obtient :

Théorème 1.11 : Toute fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

2 Approximation par somme de Riemann

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.

Définition 2.12 (Somme de Riemann) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ avec les points $x_k = a + k\dfrac{(b-a)}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$. La somme de Riemann de la fonction f est définie par

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_k)$$

Proposition 2.13 : La somme de Riemann fournit une approximation de l'intégrale (méthode des rectangles). On a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

3 Intégrale et primitive

Définition 3.14 : Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x).$$

Un résultat essentiel est que toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I, et que toutes les primitives diffèrent d'une constante. L'unique primitive de f qui s'annule en un point $a \in I$ est :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

De façon générique, toute primitive de f sera notée $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

4 Intégration par parties

L'intégration par parties permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en faisant apparaître une intégrale plus simple à calculer.

Théorème 4.15 (Intégration par parties) :
Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Exemple 4.16 :

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln(x)\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)\right]_1^2 = 2\ln(2)\end{aligned}$$

5 Changement de variables

On se donne une fonction φ de classe C^1 à partir de laquelle on fait le changement de variable suivant

$$x = \varphi(t)$$

avec

$$\varphi'(t)\,dt = dx.$$

On rappelle que l'image d'un intervalle par une fonction continue est encore un intervalle. Ainsi, l'image d'un intervalle $[a, b]$ par la fonction φ est un intervalle.

Théorème 5.17 (Changement de variables) :
Soit φ une fonction à valeurs réelles de classe C^1 définie sur un intervalle $[a, b]$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\varphi([a, b])$. On a l'égalité :

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Exemple 5.18 : On cherche à calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$. On pose $x = \cos(t) = \varphi(t)$. La fonction φ est C^1 sur $\mathbb{R}$. On choisit deux nombres a et b tel que $\cos(a) = -1$ et $\cos(b) = 1$, par exemple $a = \pi$ et $b = 0$. On a alors $\varphi([0, \pi]) \subseteq [-1, 1]$. La fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est continue sur $[-1, 1]$. On obtient par le théorème :

$$\begin{aligned}I &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1 - \cos^2(t)}\,(-\sin t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi} \sin^2(t)\,dt \quad \text{car la fonction sin est positive sur } [0, \pi] \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2t)\right)\,dt = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

6 Intégrale généralisée

6.1 Définition

On étend la définition de l'intégrale de Riemann au cas où l'intervalle d'intégration n'est pas fermé borné, c'est-à-dire un intervalle d'un des types suivants :

- intervalles bornés, ouverts ou semi-ouverts : $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$.
- intervalles non bornés : $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, $]-\infty, +\infty[$.

On notera I un intervalle qui n'est pas fermé borné.

Définition 6.19 (Fonction localement intégrable) :
Une fonction f localement intégrable sur I est une fonction intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans I.

Avec $I = [a, +\infty[$, cela signifie que, pour tout $x > a$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ existe.

Exemple 6.20 : La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est localement intégrable sur $]0, +\infty[$.

Définition 6.21 (Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert) :
Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle semi-ouvert $[a, \omega[$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^\omega f(t)\, dt$ est convergente (ou existe) si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ a une limite finie quand x tend vers ω. On pose alors :

$$\int_a^\omega f(t)\, dt = \lim_{x \to \omega} \int_a^x f(t)\, dt$$

On appelle ce nombre réel l'*intégrale généralisée* (ou *impropre*) de f sur $[a, \omega[$.
Si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ n'a pas de limite quand x tend vers ω, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^\omega f(t)\, dt$ est divergente.

Exemple 6.22 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$ est convergente.

Le problème se situe en $x = 0$. On a $\displaystyle\int \ln x\, dx = x \ln(x) - x$ et on conclut en faisant tendre x vers 0.

Exemple 6.23 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-\alpha x}\, dx$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

En effet, on a $\displaystyle\int e^{-\alpha x}\, dx = \begin{cases} -\dfrac{e^{-\alpha x}}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ x & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$

Proposition 6.24 : Soit f une fonction **positive**, localement intégrable sur un intervalle semi-ouvert $[a, \omega[$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^\omega f(t)\,dt$ est convergente si et seulement s'il existe un nombre $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [a, \omega[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \leq M$.

Comme conséquence directe de ce résultat, on a :

Théorème 6.25 (Premier critère de comparaison) :
Soit f et g deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a, \omega[$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$, telles que

$$0 \leq f \leq g \quad \text{dans } [a, \omega[.$$

- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^\omega g(t)\,dt$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^\omega f(t)\,dt$ converge.
- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^\omega f(t)\,dt$ diverge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^\omega g(t)\,dt$ diverge.

On dit dans ce cas que les intégrales sont de même nature.

Exemple 6.26 : L'intégrale de la gaussienne $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx$ est convergente.

En effet, pour tout $x \geq 0$, $|\exp(-x^2)| \leq \exp(-x)$. Puisque $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-x)\,dx$ est convergente, on conclut par application du critére de comparaison.

Théorème 6.27 (Deuxième critère de comparaison) :
Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a, \omega[$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$, telles que

$$f \geq 0, \; g \geq 0 \quad \text{dans } [a, \omega[.$$

Si $f(x) \sim g(x)$ quand x tend vers ω, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^\omega f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^\omega g(x)\,dx$ sont de même nature.

Exemple 6.28 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

En effet, la fonction à intégrer est positive et quand x tend vers 0, on a $\dfrac{\sin(t)}{t} \sim 1$.

6.2 Intégrale absolument convergente

Définition 6.29 : Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle semi-ouvert $[a,\omega[$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$. On dit que l'intégrale de f sur $[a,\omega[$ est *absolument* convergente si l'intégrale de $|f|$ sur $[a,\omega[$ est convergente.

Théorème 6.30 : Si f a une intégrale absolument convergente sur $[a,\omega[$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$, elle a également une intégrale convergente sur $[a,\omega[$. De plus, on a :

$$\left|\int_a^\omega f(t)\,dt\right| \leq \int_a^\omega |f(t)|\,dt \quad (a < \omega)$$

Remarque 6.31 : La réciproque de ce théorème est fausse. Par exemple, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est convergente mais n'est pas absolument convergente. On dit dans ce cas, que l'intégrale est semi-convergente.

6.3 Intégrale de Riemann

Pour pouvoir utiliser le critère de comparaison, il faut connaître la nature d'intégrales de fonctions simples. L'intégrale de Riemann est très utile en pratique.

Théorème 6.32 :

1. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

▷ **Démonstration :** *Il suffit de calculer une primitive de* $\dfrac{1}{x^\alpha}$ *:*

$$\int \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & si\ \alpha \neq 1 \\ \ln x & si\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour conclure, il suffit de regarder quand cette primitive admet une limite en $+\infty$ *et en* 0.
■

Exemple 6.33 : On peut utiliser l'intégrale de Riemann pour montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{1+x^3}\,dx$ converge. En effet, on a $\dfrac{\sin^2(x)}{1+x^3} \leq \dfrac{1}{x^3}$ pour tout $x \in [1,+\infty[$. Il reste alors à appliquer le critère de comparaison.

Onzième partie
Transformée et série de Fourier

1 Séries de Fourier

1.1 Définitions

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique[1], continue par morceaux.

Définition 1.1 (Coefficients de Fourier complexe) :
Les coefficients de Fourier complexes de f sont donnés par :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}\,dt \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 1.2 : Par périodicité de f, l'intégrale peut être considérée sur n'importe quel segment de longueur T. Le coefficient c_0 (pour $n = 0$) correspond à la valeur moyenne de f.

On associe à la fonction f, les polynômes trigonométrique s

$$P_N(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n(f)e^{i\frac{2n\pi}{T}x} \quad \text{pour } N \geq 0.$$

L'idée des séries de Fourier est de décomposer une fonction périodique en une somme infinie de signaux sinusoïdaux comme limite des polynômes P_N.

Définition 1.3 (Série de Fourier) :
La série trigonométrique

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(f)e^{i\frac{2n\pi}{T}x}$$

s'appelle la *série de Fourier* de f. On utilise la notation

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(f)e^{i\frac{2n\pi}{T}x}.$$

Définition 1.4 (Coefficients de Fourier réels) :
Si la fonction f est à valeurs réelles, on définit les coefficients de Fourier réels de f :

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt, \quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\,dt \text{ pour } n > 0$$
$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\,dt \text{ pour } n \geq 0$$

[1] par définition, $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t+T) = f(t)$

La série de Fourier de f est alors donnée par

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big).$$

Remarque 1.5 : Avec $n = 0$, on a $a_0 = c_0$ et $b_0 = 0$.

Les coefficients a_n, b_n pour $n \in \mathbb{N}$ et c_n pour $n \in \mathbb{Z}$, sont liés de la façon suivante :

Proposition 1.6 :

- $\forall n \geq 0, \quad c_{\pm n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) \mp i.b_n(f))$;
- Pour $n > 0, \quad a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$.

Proposition 1.7 (Parité) :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique, continue par morceaux.

- f est paire si et seulement si $c_{-n}(f) = c_n(f)$ pour tout n. Dans le cas d'une fonction f réelle, cette propriété devient $b_n(f) = 0$ pour tout n.
- f est impaire si et seulement si $c_{-n} = -c_n(f)$ pour tout n. Dans le cas réel cette propriété devient $a_n(f) = 0$ pour tout n.

Exemple 1.8 : On cherche à calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$ (fonction "dent de scie").

Puisque f est impaire on a $a_n = 0$, pour $n \geq 0$. On calcule les coefficients b_n.
Pour $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \quad \text{(intégration par parties)}$$

On déduit

$$b_n = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Par conséquent

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n} = 2 \left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} \cdots \right).$$

La figure 3 montre la série de Fourier avec $N = 1$, $N = 3$ et $N = 11$ pour les polynômes trigonométriques P_N.

▷ *Exercice 1.9 :* Trouver la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

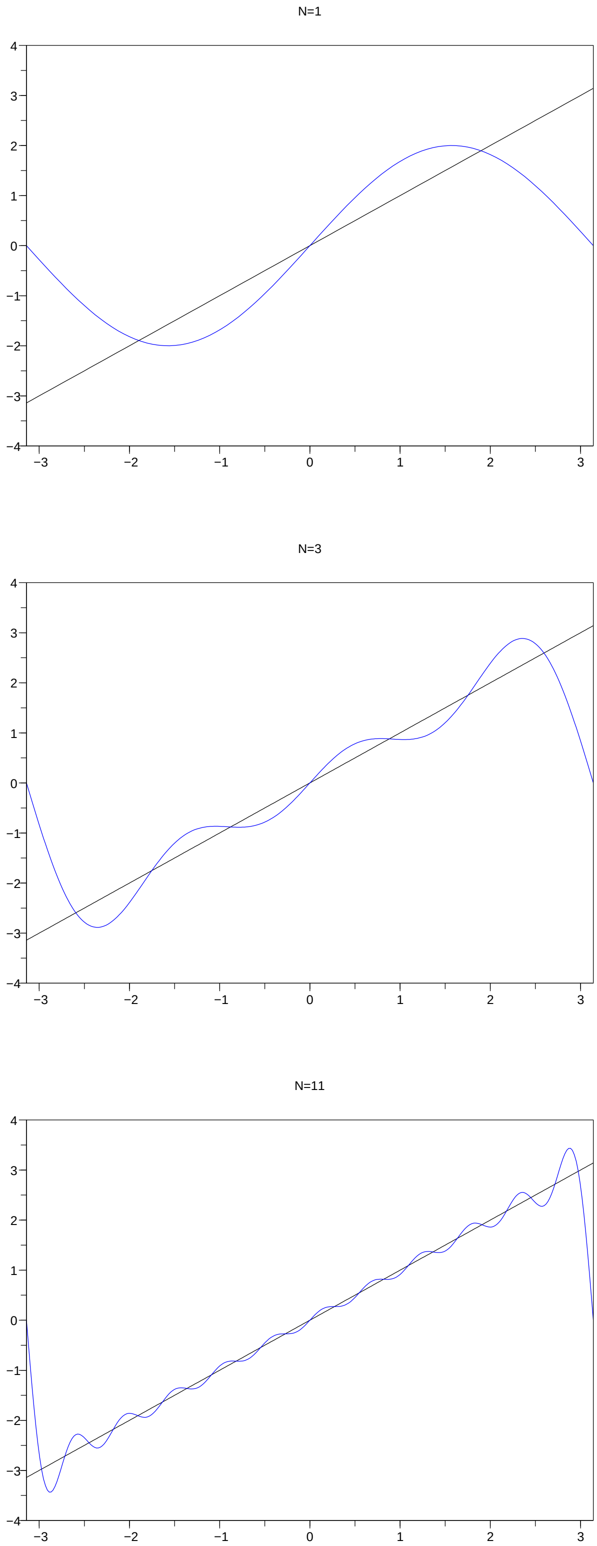


FIG. 3 – Série de Fourier de $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi]$ avec $N = 1$, $N = 3$ et $N = 11$ pour le polynôme trigonométrique P_N.

▷ *Exercice 1.10 :* Trouver la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

1.2 Formule de Parseval

Proposition 1.11 : Pour une fonction T-périodique continue par morceaux, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \, dt = \|f\|^2$$

Remarque 1.12 : L'égalité de Parseval implique en particulier que les coefficients de Fourier de f tendent vers 0 en l'infini.

Remarque 1.13 : La norme $\|f\|$ provient du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\overline{g(t)}\, dt$ définie pour des fonctions T-périodiques continues par morceaux. On a $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$.

1.3 Convergences

Théorème 1.14 (Théorème de Dirichlet) :
Soit f une fonction T-périodique, continue par morceaux. Si f admet par morceaux une dérivée première continue, alors la série de Fourier de f converge ponctuellement vers la moyenne des valeurs de f à gauche et à droite. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(f)e^{i\frac{2n\pi}{T}x} = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$$

où $f(x^-)$ et $f(x^+)$ sont les limites de f à gauche et à droite en x.
Si, de plus, f est continue en x, on a

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(f)e^{i\frac{2n\pi}{T}x}$$

Exemple 1.15 : On reprend l'exemple 1.1. La fonction f est discontinue en $x = -\pi$ et en $x = \pi$ (pensez à la périodicité ...). En fait, les points de discontinuité sont $x_k = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. De plus $\frac{1}{2}\left(f(x_k^-) + f(x_k^+)\right) = 0$ et on observe bien dans la figure 3 que la série de Fourier de f en $x = x_k$ vaut toujours 0.

Théorème 1.16 :
Soit f une fonction T-périodique, **continue** et de dérivée première continue par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f et la série de Fourier de sa dérivée f' est obtenue en dérivant terme à terme celle de f :

$$f'(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} i\frac{2n\pi}{T} c_n(f) e^{i\frac{2n\pi}{T}x}$$

1.4 Phénomènes de Gibbs

Le phénomène de Gibbs est un effet de bord observé au voisinage d'une discontinuité de la fonction. L'exemple 1.1 de la "dent de scie", illustre bien ce phénomène (cf. Fig 3). Le polynôme trigonométrique P_N est une fonction continue ; il est donc normal qu'il ne puisse approcher uniformément la fonction "dent de scie" qui, elle, n'est pas continue. Au niveau des points de discontinuité, P_N subit de fortes oscillations. Mais en dehors d'un voisinage des discontinuités, la série de Fourier converge uniformément vers la fonction.

2 Transformée de Fourier

2.1 Définitions

Pour une fonction qui n'est pas périodique, on ne peut pas utiliser le séries de Fourier. Une fonction qui n'est pas périodique peut cependant être considérée comme une fonction "périodique de période infinie". On envisage alors le passage d'une succession de fréquences à un ensemble continue de fréquences. Ceci est réalisé grâce à la transformée de Fourier.

Définition 2.17 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et telle que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ soit absolument convergente[2]. Alors la fonction F définie par

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$$

est appelée *transformée de Fourier* de f.

Exemple 2.18 : Calcul de la transformée de Fourier de la fonction "step" suivante

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-1/2}^{+1/2} e^{-i\omega x}\, dx = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 0, \\ \dfrac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} & \text{si } \omega \neq 0. \end{cases}$

▷ *Exercice 2.19 :* Montrer que la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-a|x|}$ avec $a > 0$ est donnée par $F(\omega) = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$.

▷ *Exercice 2.20 :* Montrer que la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-a^2x^2}$ vaut $F(\omega) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$.

2.2 Propriétés

Proposition 2.21 : Soit F la transformée de Fourier de f.

1. F est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On a $\lim\limits_{\omega \to \pm\infty} F(\omega) = 0$.

2.3 Transformée de Fourier inverse

Sous certaines conditions, on peut inverser la transformée de Fourier, c'est-à-dire retrouver la fonction f à partir de la connaissance de sa transformée F.

Définition 2.22 : Soit F la transformée de Fourier de f. Si l'intégrale de F est absolument convergente, alors la fonction définie par

$$x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \, dx$$

est appelée *transformée de Fourier inverse* de F.

Théorème 2.23 : On suppose que f et f' sont continues par morceaux et que l'intégrale de f est absolument convergente sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \, dx = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Si, de plus, f est continue en x, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \, dx.$$

$\mathcal{F}in$

Août 2010