Correction du devoir maison 1 9 avril 2007
Rédacteur : Tony Bourdier
A rendre pour le 31 mars 2007
Durée conseillée : 2 heures
Cet énoncé est composé de deux parties indépendantes.
NB : Il est conseillé de faire les applications numériques (calcul d'inverse de matrice, résolution de systèmes etc ...) sur Matlab (ou Scilab).

Algèbre linéaire

☛ **Question 1 :**

- $||\, x\,||_1 = 1 + 3 + 8 = 12$
- $||\, x\,||_\infty = max(1, 3, 8) = 8$
- $||\, x\,||_2 = \sqrt{1 + 8 + 64} = \sqrt{74}$

☛ **Question 2 :**
Soient $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $||\, x\,||_\infty = 1$ et $b = Ax$.

$$|||\, A\,|||_\infty = \sup_{||\, x\,||_\infty = 1} ||\, Ax\,||_\infty = \sup_{||\, x\,||_\infty = 1} ||\, b\,||_\infty$$

On a :

$$|\, b_i\,| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,||\, x_j\,|$$

Comme $||\, x\,||_\infty = 1$, on obtient :

$$|\, b_i\,| \leq \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,|$$

Ainsi

$$||\, Ax\,||_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,|$$

Ce qui conduit à l'ingénalité suivante :

$$|||\, A\,|||\infty = \max_{||\, x\,||_\infty = 1} ||\, Ax\,||_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,|$$

☛ **Question 3 :**

$$|||\, Ax^*\,|||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right| \geq \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i^*j} x_j^* \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} |\, a_{i^*j}\,| \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,|$$

Ce qui implique

$$|||\, A\,|||_\infty = \max_{||\, x\,||_\infty = 1} ||\, Ax\,||_\infty \geq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,|$$

d'où

$$|||\, A \,|||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,|$$

☛ **Question 4 :**

- $|||\, A \,|||_1 = max(5, 12, 10) = 12$
- $|||\, A \,|||_\infty = max(8, 9, 10) = 10$
- $|||\, A \,|||_F = \sqrt{1+4+25+9+1+25+1+25+1+81} = \sqrt{147}$

☛ **Question 5 :**

Soit $A \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$,

$$|||\, A \,||| = |||\, AI \,||| \leq |||\, A \,|||.|||\, I \,|||$$

$A \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow |||\, A \,||| \neq 0$, donc on peut diviser chaque membre de l'inégalité par $|||\, A \,|||$, ce qui donne :

$$1 \leq |||\, I \,|||$$

☛ **Question 6 :**

On en conclut que :

$$1 \leq |||\, I \,||| = |||\, A.A^{-1} \,||| \leq |||\, A \,|||.|||\, A^{-1} \,||| = \kappa_A$$

☛ **Question 7 :**

- $\delta b = b - \tilde{b} = b - A\tilde{x} = Ax - A\tilde{x} = A(x - \tilde{x}) = A.\delta x$
- Comme $A \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$, $\delta x = A^{-1}.\delta b$

☛ **Question 8 :**

Comme les normes sont supposées compatibles :

$$||\, \delta x \,|| = ||\, A^{-1}.\delta b \,|| \leq |||\, A \,|||^{-1}.||\, \delta b \,||$$

De même,

$$||\, \delta b \,|| = ||\, A.\delta x \,|| \leq |||\, A \,|||.||\, \delta x \,||$$

Soit

$$\frac{||\, \delta b \,||}{|||\, A \,|||} \leq ||\, \delta x \,||$$

On a donc :

$$\frac{||\, \delta b \,||}{|||\, A \,|||} \leq ||\, \delta x \,|| \leq |||\, A^{-1} \,|||.||\, \delta b \,||$$

☛ **Question 9 :**

En utilisant le même raisonnement et les égalités $Ax = b$ et $x = A^{-1}b$, on obtient :

$$\frac{||\, b \,||}{|||\, A \,|||} \leq ||\, x \,|| \leq |||\, A^{-1} \,|||.||\, b \,||$$

En inversant les inégalités, on obtient :

$$\frac{1}{|||\, A^{-1} \,|||.||\, b \,||} \leq \frac{1}{||\, x \,||} \leq \frac{|||\, A \,|||}{||\, b \,||}$$

En multipliant cette relation avec celle de la question précédente, on obtient de suite :

$$\frac{1}{\kappa_A}\frac{||\,\delta b\,||}{||\,b\,||} \leq \frac{||\,\delta x\,||}{||\,x\,||} \leq \kappa_A \frac{||\,\delta b\,||}{||\,b\,||}$$

☛ **Question 10 :**

- Si le conditionnement de la matrice A est proche de 1, l'erreur relative est encadrée par deux valeurs très proches l'une de l'autre. Si la norme du résidu est petite, l'erreur relative est également petite et la précision de la solution approximative a toute ses chances d'être satisfaisante.
- En revanche, si le conditionnement de la matrice A est grand, la valeur de l'erreur relative se situe entre 0 et un nombre possiblement très grand. On peut donc craindre que l'erreur relative soit alors grande, donc que la solution approximative soit de faible précision voire même dans certains cas complètement fausse (c.f. partie I.6.1).

☛ **Question 11 :**

$$x = A^{-1}.b = A^{-1}((A+\delta A)\tilde{x}) = (I + A^{-1}.\delta A)\tilde{x} = \tilde{x} + A^{-1}.\delta A.\tilde{x}$$

donc

$$\delta x = x - \tilde{x} = A^{-1}.\delta A.\tilde{x}$$

donc

$$||\,\delta x\,|| \leq |||\,A^{-1}\,|||.|||\,\delta A\,|||.||\,\tilde{x}\,|| = \frac{|||\,A\,|||.|||\,A^{-1}\,|||.|||\,\delta A\,|||.||\,\tilde{x}\,||}{|||\,A\,|||}$$

d'où le résultat suivant :

$$\frac{||\,\delta x\,||}{||\,\tilde{x}\,||} \leq \kappa_A \frac{|||\,\delta A\,|||}{|||\,A\,|||}$$

☛ **Question 12 :**

$\forall x \in \mathbb{R}^n, Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), i.e.\ Q^{-1} = Q^T$:

$$||\,Qx\,||_2^2 = (Qx\,|\,Qx) = (Qx)^T.Qx = x^T.Q^T.Q.x = x^T.(Q^{-1}.Q).x = x^T.x = (x\,|\,x) = ||\,x\,||_2^2$$

☛ **Question 13 :**

$$|||\,D\,|||_2 = \sup_{||\,x\,||_2=1} ||\,Dx\,||_2 = \sup_{||\,x\,||_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i x_i)^2}$$

On note $\lambda_{max} = \max_{1\leq i\leq n} |\,\lambda_i\,|$

$$\sup_{||\,x\,||_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i.x_i)^2} \leq \sup_{||\,x\,||_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{max}.x_i)^2} \leq \sup_{||\,x\,||_2=1} |\,\lambda_{max}\,| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\,\lambda_{max}\,|$$

Montrons que cette inégalité est une égalité en exhibant un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ pour lequel l'égalité est vrai. C'est le cas pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x_i = 1$ ssi $\lambda_i = \lambda_{max}$, 0 sinon. On a donc bien :

$$|||\,D\,|||_2 = \lambda_{max} = \max_{1\leq i\leq n} |\,\lambda_i\,|$$

☛ **Question 14 :**
On a $D^{-1} = diag(1/\lambda_1, ..., 1/\lambda_n)$, donc :

$$||| D^{-1} ||| = \max_{1\leq i\leq n} \left| \frac{1}{\lambda_i} \right| = \frac{1}{\min\limits_{1\leq i\leq n} | \lambda_i |}$$

donc

$$\kappa_D = \frac{\max\limits_{1\leq i\leq n} | \lambda_i |}{\min\limits_{1\leq i\leq n} | \lambda_i |}$$

☛ **Question 15 :**
Soit $A \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$, $\exists Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $A = Q.D^T.Q$, donc, pour tout x de norme 1 (donc non nul) :

$$\frac{|| Ax ||_2}{|| x ||_2} = \frac{|| QD^TQx ||_2}{|| x ||_2} = \frac{|| D^TQx ||_2}{|| x ||_2}$$

En passant au sup, on obtient :

$$||| A |||_2 = \sup_{|| x ||=1} \frac{|| D^TQx ||_2}{|| x ||_2} = \sup_{|| x ||=1} \frac{|| Dy ||_2}{|| Qy ||_2} = \sup_{|| x ||=1} \frac{|| Dy ||_2}{|| y ||_2} = ||| D |||_2$$

en posant $y = Q^Tx$. Finalement :

$$\kappa_A = ||| A |||_2 ||| A^{-1} |||_2 = ||| D |||_2 ||| D^{-1} |||_2 = \frac{| \lambda_{max} |}{| \lambda_{min} |}$$

☛ **Question 16 :**

```
A = [10 7 8 7; 7 5 6 5; 8 6 10 9; 7 5 9 10]
dA = [0,0,0.1,0.2;0.08,0.04,0,0;0,-0.02,-0.11,0;-0.01,-0.01,0,-0.02]
A2 = A+dA
x2 = A2\b
dx = x-x2
errx = norm(dx,2)/norm(x+dx,2)
errA = norm(dA,2)/norm(A,2)
coef = errx/errA
```

On trouve

```
x2 = ! - 81. !
     !  137. !
     ! - 34. !
     !   22. !
coef = 131.40395
```

On remarque que le facteur d'amplification d'erreur est énorme : l'erreur sur les coefficients de la matrice est de l'ordre de 0,2 et l'erreur obtenue sur les coefficients de la solution est de l'ordre de 130. La solution du système trouvée avec la matrice $A + \delta A$ n'a plus rien à voir avec la solution de départ.

☛ **Question 17 :**

```
>> cond(A,2)
  ans = 2.9841e+003

>> cond(A,inf)
  ans = 4.4880e+003

>> cond(A,1)
  ans = 4.4880e+003
```

On s'aperçoit que, quelque soit la norme choisie, le conditionnement est de l'ordre de 3000 à 5000, ce qui est énorme. Ceci explique la grande sensibilité du résultat aux imprécisions de mesures.

☛ **Question 18 :**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que le résultat est complètement faux.

☛ **Question 19 :**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le résultat est satisfaisant.

☛ **Question 20 :**

```
>> cond(A,2)
  ans = 2.6179
```

La matrice A est bien conditionnée (k_A très petit). Pourtant, le premier algorithme donne un résultat faux. On en conclu qu'un faible conditionnement n'indique pas que le résultat sera satisfaisant quelque soit l'algorithme mais qu'il est possible d'effectuer le calcul pour aboutir à un résultat satisfaisant.

☛ **Question 21 :**

$$\begin{aligned}(I-\Pi)Y = (I-\Pi)(X\theta+R) &= X\theta + R - \Pi.X\theta - \Pi R \\ &= X\theta + R - X\theta - \Pi.R = (I-\Pi).R = \Pi^{\perp}.R\end{aligned}$$

☛ **Question 22 :**

$$\log(q) = \log(\alpha) - \frac{t}{\tau}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} \log(\alpha) \\ \frac{-1}{\tau} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \log(q_1) \\ \vdots \\ \log(q_m) \end{pmatrix}$$

☛ **Question 23 :**

$$A^T.A.x = A^T.b$$

$$A^T.A = \begin{pmatrix} m & S_t \\ S_t & S_{tt} \end{pmatrix} \qquad A^T.b = \begin{pmatrix} S_{lq} \\ S_{t,lq} \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} m & S_t \\ S_t & S_{tt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \log(\alpha) \\ \dfrac{-1}{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{lq} \\ S_{t,lq} \end{pmatrix}$$

☛ **Question 24 :**
$Ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = 0\}$

☛ **Question 25 :**
Soit $x \in Ker(A)$. Par définition, $Ax = 0$, donc $A^T.Ax = A^T.0 = 0$ donc $x \in Ker(A^T.A)$.
Donc $Ker(A) \subset Ker(A^T.A)$

☛ **Question 26 :**
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $A^TAx = 0$. $x^TA^TAx = x^T.0 = 0$.

☛ **Question 27 :**
$x^TA^TAx = ||\,Ax\,||_2^2$ donc $x^TA^TAx = 0 \Rightarrow ||\,Ax\,||_2^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$ donc $x \in Ker(A)$.
On a donc : $x \in Ker(A^TA) \Rightarrow x^TA^TAx = 0 \Rightarrow ||\,Ax\,||_2^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in Ker(A)$
Donc $Ker(A^TA) \subset Ker(A)$

☛ **Question 28 :**
On suppose que $m >> n$. On a $dim(A) = \min(m, n) = n = dim(A^T.A)$. Or $Ker(A^TA) \subset Ker(A)$ et $Ker(A^TA) \supset Ker(A)$ donc $Ker(A^TA) = Ker(A)$ et ainsi :

$$rg(A) = dim(A) - dim(Ker(A)) = n - dim(Ker(A))$$
$$= n - dim(Ker(A^TA)) = dim(A^TA) - dim(Ker(A^TA)) = rg(A^TA)$$

☛ **Question 29 :**
La solution du système

$$A^TAx = A^Tb$$

est unique ssi A^TA est de plein rang, *i.e.* $rg(A^TA) = n$, *i.e.* $rg(A) = n$.

☛ **Question 30 :**
$\widehat{x} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $E(\widehat{x}) = ||\,Ax - b\,||_2^2 = 20$

☛ **Question 31 :**

$$f[x_0] = f(x_0) = \frac{\det(f(x_0))}{1} = \frac{det(f(x_0))}{det(1)}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1) \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}$$

soit

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{(x_1-x_0)(f(x_2)-f(x_1))-(x_2-x_1)(f(xx_1)-f(x_0))}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)(x_2-x_0)}$$

Or,

$$det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 0 & x_1-x_0 & f(x_1)-f(x_0) \\ 0 & x_2-x_0 & f(x_2)-f(x_0) \end{pmatrix}$$

$$= (x_1-x_0)(f(x_2)-f(x_0))-(x_2-x_0)(f(x_1)-f(x_0))$$

On procède de même avec le déterminant du dénominateur et on retrouve l'expression $\frac{(x_1-x_0)(f(x_2)-f(x_1))-(x_2-x_1)(f(xx_1)-f(x_0))}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)(x_2-x_0)}$, donc :

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}}$$

☛ **Question 32 :**

$\forall i \in \{0,...,n\},\ f(x_i) = p_n(x_i) = a_0 + a_1.x_i + ... + a_n.x_i^n$

☛ **Question 33 :**

Le système de la question précédente peut également s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

☛ **Question 34 :**

On déduit de la remarque précédente une expression de a_n :

$$a_n = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix}}$$

Or, $a_n = f[x_0,...,x_n]$, ce qui permet de conclure.