Devoir maison 1 1er mars 2007
Rédacteur : Tony Bourdier
A rendre pour le 31 mars 2007
Durée conseillée : 2 heures
Cet énoncé est composé de deux parties indépendantes.
NB : Il est conseillé de faire les applications numériques (calcul d'inverse de matrice, résolution de systèmes etc ...) sur Matlab (ou Scilab).

Algèbre linéaire

Table des matières

I Conditionnement d'une matrice

Vous avez vu en TD que certains systèmes linéaires sont très sensibles aux erreurs dues à l'arithmétique flottante. Dans cette première partie, nous allons essayer de mesurer cette sensibilité.

I.1 Notations

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels
- $\mathcal{G}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients réels
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées orthogonales[1] d'ordre n à coefficients réels
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et 1 colonne sera identifié à $\mathbb{R}^n$
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera a_{ij} ses coefficients.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera A^T sa transposée (*i.e.* $a^T_{ij} = a_{ji}$).
- On notera 0 pour désigner aussi bien le réel 0 que le vecteur $0 = (0, \dots, 0)^T$

I.2 Normes

I.2.1 Normes vectorielles

Nous allons donc commencer par introduire une métrique permettant de mesurer l'écart entre une solution numérique et une solution exacte. Cela nous amène donc à aborder la notion de norme vectorielle.

☞ **Définition 1.2.1 :** On appelle norme vectorielle toute application

$$\begin{array}{rccc} ||\,.\,|| : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ||\,x\,|| \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\forall x \neq 0,\ ||\,x\,|| > 0$

(ii) $||\,x\,|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ ||\,\alpha x\,|| = |\,\alpha\,|.||\,x\,||$

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ ||\,x + y\,|| \leq ||\,x\,|| + ||\,y\,||$

✎ **Remarque 1.2.1 :** La norme la plus connue est la *norme euclidienne* définie[2] par

$$||\,x\,||_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

[1] Une matrice carrée A d'ordre n à coefficients réels est dite orthogonale si elle vérifie : $A^T A = I$

[2] On peut également formuler cette égalité sous la forme : $||\,x\,||_2^2 = x^T x$

avec $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

On définit, en plus de la norme euclidienne, deux autres normes.

☞ **Définition 1.2.2 :** On définit la norme $||\,.\,||_1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||\,x\,||_1 = \sum_{i=1}^{n} |\,x_i\,|$$

et la norme $||\,.\,||_\infty$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||\,x\,||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\,x_i\,|$$

☛ **Question 1.2.1 :** *(0,5 points)* Soit le vecteur $x = (1, -3, -8)^T \in \mathbb{R}^3$, calculez les valeurs des trois normes définies précédemment pour x.

I.2.2 Normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

L'objectif étant de nous intéresser aux systèmes linéaires, il convient de définir des normes sur l'ensemble des matrices ($\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

☞ **Définition 1.2.3 :** Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou encore norme matricielle) est une application

$$\begin{array}{cccc} |||\,.\,||| : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & |||\,A\,||| \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes (propriétés des normes usuelles $(i), (ii), (iii), (iv)$ ainsi qu'une propriété d'algèbre (v)) :

(i) $\forall A \neq 0,\ |||\,A\,||| > 0$

(ii) $|||\,A\,||| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ |||\,\alpha A\,||| = |\,\alpha\,|.|||\,A\,|||$

(iv) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |||\,A + B\,||| \leq |||\,A\,||| + |||\,B\,|||$

(v) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |||\,AB\,||| \leq |||\,A\,|||.|||\,B\,|||$

✎ **Remarque 1.2.2 :** On construit facilement une norme matricielle à partir d'une norme vectorielle en posant :

$$|||\,A\,||| = \sup_{||\,x\,||=1} ||\,Ax\,||$$

On dit que la norme matricielle matricielle ainsi construite à partir d'une norme vectorielle lui est subordonnée.

☛ **Question 1.2.2 :** *(1,5 points)* On cherche à construire la norme $|||\,.\,|||_\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à partir de la relation donnée par la remarque précédente. Montrez que :

$$|||\,A\,|||_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |\,a_{ij}\,|$$

Soit $i^* = \arg\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ *i.e.* $\sum_{j=1}^{n} |a_{i^*j}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
On considère le vecteur x^* tel que $||\,x^*\,||_\infty = 1$ et :

$$x_j^* = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i^*j} \geq 0 \\ -1 & \text{si } a_{i^*j} < 0 \end{cases}$$

☛ **Question 1.2.3 :** *(1 point)* Calculer la norme infinie du vecteur Ax^* et en conclure que :

$$|||\,A\,|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |\,a_{ij}\,|$$

☞ **Définition 1.2.4 :** On définit de même les deux normes $|||\,.\,|||_1$ et $|||\,.\,|||_F$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{array}{cccl} |||\,.\,|||_1 & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ & & A & \mapsto |||\,A\,|||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |\,a_{ij}\,| \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccl} |||\,.\,|||_F & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ & & A & \mapsto |||\,A\,|||_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} \end{array}$$

☛ **Question 1.2.4 :** *(0,5 point)* Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $|||\,A\,|||_1, |||\,A\,|||_\infty$ et $|||\,A\,|||_{\mathcal{F}}$

☞ **Définition 1.2.5 :** Une norme vectorielle et une norme matricielle sont compatibles si $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n$:

$$||\,Ax\,|| \leq |||\,A\,|||.||\,x\,||$$

✎ **Remarque 1.2.3 :** Une norme vectorielle et sa norme matricielle subordonnée sont compatibles.

I.3 Conditionnement

☞ **Définition 1.3.6 :** On définit le conditionnement d'une matrice $A \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$ par la quantité :

$$\kappa_A = |||\, A \,|||.|||\, A^{-1} \,|||$$

☛ **Question 1.3.5 :** *(1 point)* Montrer[3] que $|||\, I \,||| \geq 1$

☛ **Question 1.3.6 :** *(0,5 points)* En déduire que $\forall A \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R}),\ \kappa_A \geq 1$

I.4 Bornes d'erreurs

Soit le système linéaire :

$$Ax = b$$

avec $A \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$

On note x la solution exacte du système et $\tilde{x} = x + \delta x$ la solution approximative obtenue en arithmétique flottante. L'erreur δx doit être la plus proche possible de 0. ($||\, \delta_x \,||$ doit être la plus petite possible)

On note δb et on appelle résidu la quantité

$$\delta b = b - \tilde{b}$$

où $\tilde{b} = A\tilde{x}$

☛ **Question 1.4.7 :** *(1 point)* Exprimez le résidu en fonction de l'erreur puis l'erreur en fonction du résidu.

☛ **Question 1.4.8 :** *(1,5 points)* On considère que la norme matricielle et la norme vectorielle utilisées ci-après sont compatibles. Déduire de la question précédente :

$$\frac{||\, \delta b \,||}{|||\, A \,|||} \leq ||\, \delta x \,|| \leq |||\, A^{-1} \,|||.||\, \delta b \,||$$

☛ **Question 1.4.9 :** *(1,5 points)* Etablir par un raisonnement similaire que

$$\frac{1}{|||\, A^{-1} \,|||.||\, b \,||} \leq \frac{1}{||\, x \,||} \leq \frac{|||\, A \,|||}{||\, b \,||}$$

et en déduire le résultat fondamental suivant :

$$\frac{1}{\kappa_A} \frac{||\, \delta b \,||}{||\, b \,||} \leq \frac{||\, \delta x \,||}{||\, x \,||} \leq \kappa_A \frac{||\, \delta b \,||}{||\, b \,||}$$

☛ **Question 1.4.10 :** *(0,5 point)* Que peut-on en conclure lorsque κ_A est proche de 1 ? Lorsque κ_A est grand ?

[3]Utiliser le fait que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A.I = A$

On considère désormais que dans le système flottant considéré, la matrice A est elle-même approximée par $\tilde{A} = A + \delta A$. On note toujours x la solution du système $Ax = b$ et $\tilde{x} = x + \delta x$ la solution du système $\tilde{A}\tilde{x} = b$.

☛ **Question 1.4.11 :** *(1,5 points)* Montrez que :

$$\frac{||\,\delta x\,||}{||\,\tilde{x}\,||} \leq \kappa_A \frac{|||\,\delta A\,|||}{|||\,A\,|||}$$

I.5 Expression du conditionnement en fonction des valeurs propres

On considère désormais la norme vectorielle $||\,.\,||_2$ ainsi que sa norme matricielle subordonnée.

☛ **Question 1.5.12 :** *(1,5 points)* Soit $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrez que $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$||\,Qx\,||_2 = ||\,x\,||_2$$

☛ **Question 1.5.13 :** *(1 points)* Soit une matrice diagonale inversible $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Montrer que :

$$|||\,D\,|||_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\,\lambda_i\,|$$

☛ **Question 1.5.14 :** *(0,5 point)* En déduire que pour toute matrice diagonale inversible $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$:

$$\kappa_D = \frac{\max\limits_{0 \leq i \leq n} |\,\lambda_i\,|}{\min\limits_{0 \leq i \leq n} |\,\lambda_i\,|}$$

☛ **Question 1.5.15 :** *(2,5 points)* En déduire que $\forall A \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$ symétrique

$$\kappa_A = \frac{|\,\lambda_{max}\,|}{|\,\lambda_{min}\,|}$$

où λ_{max} et λ_{min} sont respectivement la plus grande et la plus petite (en valeur absolue) valeur propre de A.

I.6 Exemples

I.6.1 Exemple 1

On cherche à établir une relation linéaire entre le rendement d'une culture de blé et le traitement que l'on donne à la parcelle de blé. On dispose de quatre engrais naturels (1), (2), (3) et (4). On décide de faire 4 tests différents en attribuant à chaque parcelle des quantités différentes de chaque engrais et on note A cette matrice (que l'on nommera matrice d'expérience) :

$$A = \begin{pmatrix} & \text{qté engrais (1)} & \text{qté engrais (2)} & \text{qté engrais (3)} & \text{qté engrais (4)} \\ \text{parcelle 1} & 10 & 7 & 8 & 7 \\ \text{parcelle 2} & 7 & 5 & 6 & 5 \\ \text{parcelle 3} & 8 & 6 & 10 & 9 \\ \text{parcelle 4} & 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

On observe les résultats (en quantité de blé produit au bout d'un mois)

$$b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc de résoudre le système $Ax = b$. La solution est :

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, chaque engrais a exactement la même influence sur le rendement.
Seulement, les quantités d'engrais manipulées sont en miligrammes et bien évidemment, les mesures ne sont pas parfaites. Ainsi, au lieu d'avoir la matrice d'expérience A, on a une matrice légèrement différente :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix}$$

☛ **Question 1.6.16 :** *(0,5 point)* Calculez la solution du système $\tilde{A}x = b$ qui a priori devrait être très proche de la solution réelle.

☛ **Question 1.6.17 :** *(1 point)* Commentez et expliquez le résultat obtenu (pas de blabla attendu mais une explication mathématique ...)

I.6.2 Exemple 2

☛ **Question 1.6.18 :** *(0,5 point)* On considère le système flottant $\mathcal{F} = \mathbb{F}(10, 4, -\infty, +\infty)$. Calculez la solution du système suivant :

$$\begin{cases} 5.10^{-5}x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

par la méthode de Gauss (càd sans échange d'équation) en suivant exactement l'algorithme tel qu'il serait exécuté par une machine travaillant avec $\mathcal{F}$.

On propose d'adopter une autre stratégie, celle du pivot partiel : à chaque étape k, on cherche d'abord le pivot maximum en valeur absolue dans la colonne k à partir de la ligne k :

$$\max_{i \in [k,n]} |a_{i,k}^{(k-1)}|$$

(L'exposant de $a_{i,k}^{(k-1)}$ est le numéro de l'étape à laquelle on se trouve dans la méthode de Gauss.)

☛ **Question 1.6.19 :** *(1 point)* Calculez sur cette même machine la solution du système par la méthode de Gauss en utilisant la stratégie du pivot partiel (détailler toutes les étapes du calcul).

☛ **Question 1.6.20 :** *(1 point)* Calculez le conditionnement (norme de votre choix) de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5.10^{-5} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et conclure quant à l'information qu'apporte le conditionnement d'une matrice.

II Questions diverses

Cette partie comporte plusieurs cours exercices indépendants.

II.1 Projection orthogonale

Soient

i) $Y, R \in \mathbb{R}^n$,

ii) $\theta \in R^p$,

iii) $X \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ tels que

$$Y = X.\theta + R$$

iv) Π l'opérateur de projection sur le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs colonnes de X

☛ **Question 2.1.21 :** *(1 point)* Exprimez $(I - \Pi)Y$ en fonction de $\Pi^\perp$ et R, où $\Pi^\perp$ est le projecteur orthogonal sur $E^\perp$ et I l'identité.

II.2 Problèmes liés au moindres carrés

II.2.1 Formulation d'un problème des moindres carrés

On cherche à identifier un modèle physique :

$$q = f(t) = \alpha e^{-t/\tau}$$

dont les paramètres sont (α, τ). On dispose d'une série de mesures $(t_i, q_i)_{1 \leq u \leq m}$. On suppose que pour tout i, $q_i > 0$. Le modèle n'est pas linéaire (en ses paramètres) mais cette condition s'obtient en travaillant sur $log(q) = log(f(t))$. Pour identifier les paramètres, on applique alors la méthode des moindres carrés.

☛ **Question 2.2.22 :** *(1 point)* Ecrire le modèle (après transformation via le log) sous la forme standard $||\, Ax - b\, ||^2$ (explicitez A, b et x en fonction des données du problème).

☛ **Question 2.2.23 :** *(1 point)* Ecrire les équations normales du problème en fonction des quantités suivantes :

$$S_t = \sum_{i=1}^{m} t_i, \quad S_{tt} = \sum_{i=1}^{m} t_i^2, \quad S_{lq} = \sum_{i=1}^{m} log(q_i), \quad S_{t,lq} = \sum_{i=1}^{m} t_i.log(q_i),$$

II.2.2 Equations normales

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m \geq n$.

☛ **Question 2.2.24 :** *(0,5 point)* Donnez la définition de $\text{Ker}(A)$.

☛ **Question 2.2.25 :** *(0,5 point)* Montrez que $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^T A)$.

☛ **Question 2.2.26 :** *(0,5 point)* Montrez que si $A^T Ax = 0$ alors, $x^T A^T Ax = 0$.

☛ **Question 2.2.27 :** *(0,5 point)* Déduisez-en que $\text{Ker}(A^T A) \subset \text{Ker}(A)$.

☛ **Question 2.2.28 :** *(0,5 point)* Déduisez-en que $\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker}(A)$ et que $\text{Rang}(A^T A) = \text{Rang}(A)$.

On admet que les équations normales

$$A^T Ax = A^T b$$

admettent au moins une solution x quelque soit A.

☛ **Question 2.2.29 :** *(0,5 point)* Montrez que cette solution est unique si et seulement si $\text{Rang}(A) = n$. Exprimez alors x en fonction des données du problème.

II.2.3 Résolution d'un problème des moindres carrés

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

☛ **Question 2.2.30 :** *(1 point)* Trouvez la solution au sens des moindres carrés de l'équation $Ax = b$ et l'erreur correspondante.

II.3 Différences divisées et déterminants

Soient $n+1$ réels deux à deux distincts $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et le polynôme d'interpolation p_n de f pour les points $x_0, ..., x_n$.

☛ **Question 2.3.31 :** *(0,5 point)* Montrer que :

$$f[x_0] = \frac{det(f(x_0))}{det(1)}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{det \begin{pmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1) \end{pmatrix}}{det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{pmatrix}}{det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}}$$

On appelle a_i les coefficients de p_n expimés dans la base canonique.

☛ **Question 2.3.32 :** *(0,5 point)* Pour $i \in [0, n]$, exprimez $f(x_i)$ en fonction des a_i et des x_i.

☛ **Question 2.3.33 :** *(1 point)* En déduire que le problème d'interpolation se ramène à la résolution d'un système linéaire $Ay = b$ où A, y et b sont à expliciter.

On sait que pour tout i, la i^e composante y_i de y dans l'équation $Ay = b$ vérifie :

$$y_i = \frac{det(\tilde{A})}{det(A)}$$

où $\tilde{A}$ est la matrice A dont la i^e colonne a été remplacée par b.

☛ **Question 2.3.34 :** *(1 point)* En déduire une généralisation de la question **2.3.31** (*i.e.* une expression de $f[x_0, x_1, ..., x_n]$)