TD sur la logique du premier ordre 11 janvier 2008

Prérequis : TD 12 + valuation (en logique du premier ordre), interprétation, interprétation d'un terme, d'un atome et d'une formule, modèle, théorème, déduction sémantique, système formel, validité, complétude.
Durée : 1 h 50

TD 13 – Logique du premier ordre (suite)
Sémantique

Exercice 1

En utilisant les constantes s pour Serge, t pour Tobby et les symboles de relation $a(x, y)$: « x aime y », $c(x)$: « x est un chien », $d(x)$: « x est un animal domestique », $e(x)$: « x est un enfant »et $o(x)$: « x est un oiseau », formaliser les énoncés suivants :

1. Les chiens et les oiseaux sont des animaux domestiques
2. Tobby est un chien qui aime les enfants
3. Les oiseaux n'aiment pas les chiens
4. Serge aime tous les animaux domestiques sauf les chiens
5. Certains chiens aiment les enfants

Exercice 2

Soit I l'interprétation de domaine $|\,I\,| = \{0, 1, 2\}$ telle que

- $I(p) = \{0, 1\}$, $I(q) = \{1, 2\}$, $I(r) = \varnothing$ où $p, q, r \in \mathbb{R}_1$
- $I(s) = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$ où $s \in \mathbb{R}_2$
- $I(a) = 0$ où $a \in \mathbb{F}_0$
- $I(f) = x \in |\,I\,| \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ où $f \in \mathbb{F}_1$

I est-elle un modèle pour les formules suivantes :

1. $\exists x\, r(x)$
2. $\exists x\, (p(x) \wedge q(x))$
3. $\forall x\, (p(x) \vee q(x))$
4. $\forall x\, (r(x) \Rightarrow q(x))$
5. $f(f(a))) = a$
6. $f(f(f(a))) = a$
7. $\forall x\, \big(s(x, f(x)) \vee (f(x) = x)\big)$

Exercice 3

Soient $r \in \mathbb{R}_2$ et $x, y, z \in X$. Les interprétations suivantes sont-elles des modèles pour les formules suivantes :

- I_1 définie par : $|\,I_1\,| = \mathbb{N}$ et $I(r) = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}$ (*i.e* r est interprété par « $<$ »)
- I_2 définie par : $|\,I_2\,| = \mathbb{Q}$ et $I(r) = \{(m, n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid m < n\}$ (*i.e* r est interprété par « $<$ »)
- I_3 définie par : $|\,I_3\,| = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $I(r) = \{(E, F) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid E \subseteq F\}$

1. $(\exists x)(\forall y)\ r(x, y)$
2. $(\exists x)(\forall y)\ r(y, x)$
3. $(\forall x)(\exists y)\ \big\{r(x, y) \wedge (\forall z)\big(r(x, z) \Rightarrow (z = y \vee r(y, z))\big)\big\}$
4. $(\forall x)(\forall y)\ \big\{r(x, y) \Rightarrow (\exists z)\big(r(x, z) \wedge r(z, y)\big)\big\}$