Graphes et Recherche Opérationnelle

ESIAL 2$^{\text{nde}}$ année

Notes de cours

Tony Bourdier
Version 5.1

École Supérieure d'Informatique et Applications de Lorraine
193 avenue Paul Muller
CS 90172 – 54602 Villers-lès-Nancy

tony.bourdier@loria.fr
www.tony-bourdier.fr

Table des matières

Première partie
Programmation linéaire continue

1 Introduction

1.1 Modélisation

1.1.1 Exemple de problème de production

On considère deux produits nécessitant une certaine quantité de ressources pour leur production. On souhaite maximiser les bénéfices totaux découlant de la vente de ces deux produits. Le tableau suivant récapitule les ressources requises et bénéfices engendrés pour et par la production de ces deux produits.

	Produit 1	Produit 2	Disponibilité
Equipement	1	2	15
Main d'oeuvre	1	1	9
Matière première	3	1	21
Bénéfice	$1,1$	1	–

La démarche à suivre pour modéliser un problème en recherche opérationnelle est la suivante :

(i) Choix des inconnues. Pour l'exemple traité, les inconnues, notées x_j, correspondent au nombre de produit j fabriqués.

(ii) Choix de la fonction que l'on cherche à optimiser ($i.e.$ maximiser ou minimiser) appelée fonction-objectif. Dans notre cas, il s'agit du bénéfice engendré par la vente des deux produits :

$$\varphi(x_1, x_2) = 1,1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$$

comme on souhaite la maximiser cette fonction, on note :

$$\max_{x_1,x_2} [\varphi(x_1, x_2) = 1,1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2]$$

(iii) Détermination de toutes les contraintes à respecter. Ici, il s'agit des disponibilités :

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 & \leq & 15 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 & \leq & 9 \\ 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 & \leq & 21 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

En remarquant que quelque soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \leq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists \delta \geq 0,\ \alpha + \delta = \beta$$

on peut également écrire l'ensemble des contraintes sous la forme suivante :

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \delta_1 & = & 15 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \delta_2 & = & 9 \\ 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \delta_3 & = & 21 \\ x_1, x_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3 & \geq & 0 \end{array}$$

1.1.2 Différentes formes d'un programme linéraire

Définition 1.1 : Un problème est posé sous **forme canonique mixte** ssi il est présenté sous l'une des deux formes suivantes :

(i) Dans le cas d'une maximisation :

$$P^+ = \begin{cases} \textit{(fonction-objectif)} & \max\limits_{x_1,\dots,x_n} [\varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j] \\ \textit{(contraintes d'inégalité)} & \forall i \in I_1, \ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \\ \textit{(contraintes d'égalité)} & \forall i \in I_2, \ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \\ \textit{(contraintes de signe)} & \forall j \in J_1, \ \ x_j \geq 0 \\ & \forall j \in J_2, \ \ x_j \text{ de signe quelconque} \end{cases}$$

(ii) Dans le cas d'une minimisation :

$$P^- = \begin{cases} \textit{(fonction-objectif)} & \min\limits_{x_1,\dots,x_n} [\varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j] \\ \textit{(contraintes d'inégalité)} & \forall i \in I_1, \ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \\ \textit{(contraintes d'égalité)} & \forall i \in I_2, \ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \\ \textit{(contraintes de signe)} & \forall j \in J_1, \ \ x_j \geq 0 \\ & \forall j \in J_2, \ \ x_j \text{ de signe quelconque} \end{cases}$$

où :
- I_1 est l'ensemble des indices des contraintes d'inégalité,
- I_2 est l'ensemble des indices des contraintes d'égalité,
- $I_1 \cup I_2 = I = \{1, \dots, m\}$ est l'ensemble des indices des contraintes,
- J_1 est l'ensemble des indices de variables de signe positif,
- J_1 est l'ensemble des indices de variables de signe, quelconque
- $J_1 \cup J_2 = J = \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des indices des variables.

Remarque 1.2 : n est le nombre de variables et m le nombre de contraintes d'égalité et d'inégalité. On supposera par la suite que $m \leq n$.

Définition 1.3 : Un problème est posé sous **forme canonique pure** ssi il ne possède pas de contrainte d'égalité :

$$I_2 = J_2 = \varnothing$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$P^+ = \begin{cases} \textit{(fonction-objectif)} & \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} [\varphi = c^\top x] \\ \textit{(contraintes d'inégalité)} & A \cdot x \leq b \\ \textit{(contraintes de positivité)} & x \geq 0_n \end{cases}$$

et

$$P^- = \begin{cases} \textit{(fonction-objectif)} & \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} [\varphi = c^\top x] \\ \textit{(contraintes d'inégalité)} & A \cdot x \geq b \\ \textit{(contraintes de positivité)} & x \geq 0_n \end{cases}$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ et $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sont les données du problème et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est l'inconnue que l'on cherche à déterminer.

Définition 1.4 : Un problème est posé sous **forme standard** ssi il ne possède que des contraintes d'égalité :

$$I_1 = \varnothing,\ J_2 = \varnothing \text{ et } \forall i \in I_2,\ b_i \geq 0$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$P = \begin{cases} \textit{(fonction-objectif)} & \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \textit{ ou } \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} [\varphi = c^\top x] \\ \textit{(contraintes d'égalité)} & A \cdot x = b \\ \textit{(contraintes de positivité)} & x \geq 0_n \\ & b \geq 0_m \end{cases}$$

Proposition 1.5 : Tout problème linéaire écrit sous forme canonique s'écrit sous forme standard et inversement. Pour cela, on introduit des variables appelées « variables d'écart » :

$$A \cdot x \leq b \quad \Leftrightarrow \quad (\, A \mid I_m \,) \cdot \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix} = b$$

$$A \cdot x \geq b \quad \Leftrightarrow \quad (\, A \mid I_m \,) \cdot \begin{pmatrix} x \\ -\delta \end{pmatrix} = b$$

où $I_m = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_m \end{pmatrix} \geq 0_m$.

Définition 1.6 : La forme standard d'un problème est dite **simpliciale** ssi la matrice des contraintes A se décompose de la façon suivante :

$$A = (\, I_m \mid H \,)$$

où $H \in \mathcal{M}_{m,n-p}(\mathbb{R})$. Les contraintes se réécrivent donc :

$$(\, I_m \mid H \,) \cdot x = b$$

1.2 Définitions

1.2.1 Solutions

Dans cette partie, nous considérerons un problème P écrit sous forme standard :

$$P = \begin{cases} \textit{(fonction-objectif)} & \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \textit{ ou } \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n}[\varphi = c^\top x] \\ \textit{(contraintes d'égalité)} & A \cdot x = b \\ \textit{(contraintes de positivité)} & x \geq 0_n \end{cases}$$

avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.7 : On appelle **solution** de P tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $A \cdot x = b$, autrement dit tout vecteur satisfaisant aux contraintes d'égalité.

Définition 1.8 : On appelle **solution réalisable** (ou **solution admissible**) de P tout vecteur $x \geq 0_n$ vérifiant $A \cdot x = b$, autrement dit tout vecteur satisfaisant à toutes les contraintes du problème (contraintes d'égalité et de positivité).

Remarque 1.9 : On appelle **domaine réalisable** et l'note $\mathcal{D}_F$ l'ensemble de toutes les solutions réalisable du problème :

$$\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b \text{ et } x \geq 0_n\}$$

Définition 1.10 : Une solution réalisable $x^* \in \mathcal{D}_F$ est dite **optimale** ssi

(i) *(dans le cas d'une maximisation)* $\forall x \in \mathcal{D}_F,\ c^\top x^* \geq c^\top x$

(ii) *(dans le cas d'une minimisation)* $\forall x \in \mathcal{D}_F,\ c^\top x^* \leq c^\top x$

1.2.2 Base et solutions de base réalisables

Définition 1.11 : On suppose que la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est de rang m. On peut donc trouver m vecteurs-colonnes $v_1, \ldots, v_m$ de A linéairement indépendants. On note B les indices de ces vecteurs-colonnes dans A, A_B la matrice formée de ces vecteurs-colonnes :

$$A_B = (\ v_1 \mid \ \ldots \ \mid v_m\ )$$

et H les indices des autres colonnes de A ainsi que A_H la matrice formée de ces vecteurs-colonnes. La matrice A peut alors s'écrire, à une permutation des colonnes près :

$$A = (\ A_B \mid A_H\ )$$

où

- $A_B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est une matrice telle que $rang(A_B) = m$ (on parle de « base extraite de A »)
- $A_H \in M_{m,n-m}(\mathbb{R})$

On partitionne alors les vecteurs c et x de la même façon :

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_H \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix}$$

où $c_B, x_B \in \mathbb{R}^m$ et $x_B,\ x_H \in R^{n-m}$ de telle sorte que le problème s'écrive sous la forme suivante :

$$P = \begin{cases} \textit{(fonction-objectif)} & \min \ ou \ \max[\varphi = c_B^\top x_B + c_H^\top x_H] \\ \textit{(contraintes d'égalité)} & (\, A_B \mid A_H \,) \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix} = A_B \cdot x_B + A_H \cdot x_H = b \\ \textit{(contraintes de positivité)} & x_B \geq 0_m \ \text{ et } \ x_H \geq 0_{n-m} \end{cases}$$

Exemple 1.12 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 9 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. On peut former une base extraite de A à partir de $B_1 = \{1,2,3\}$, $B_2 = \{1,2,4\}$, $B_3 = \{1,3,4\}$ et $B_4 = \{2,3,4\}$. On a alors : $A_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $A_{B_4} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Définition 1.13 : Une solution $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix}$ est dite **de base** ssi $x_H = 0_{n-m}$, autrement dit, ssi elle peut s'écrire sous la forme :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$$

Proposition 1.14 : Soit $A_B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ une base extraite de A, *i.e.* telle que

$$rang(A_B) = m \quad et \quad \exists A_H \in M_{m,n-m}(\mathbb{R}),\ A = (\, A_B \mid A_H \,)$$

$\begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1} \cdot b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$ est une solution de base.

▷ **Démonstration :** *Si A_B est de rang m, alors A_B est inversible, donc A_B^{-1} existe et :*

$$(\, A_B \mid A_H \,) \cdot \begin{pmatrix} A_B^{-1} \cdot b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} = A_B \cdot A_B^{-1} \cdot b + A_H \cdot 0_{n-m} = b$$

■

Remarque 1.15 : Pour alléger les notations, on s'autorisera à dire que B est une base extraite même si B représente les indices des vecteurs de la base extraite. En particulier, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^m$, on note

$$x_{/B}$$

pour désigner les coordonnées de x dans la base B. On omet de préciser cette base lorsqu'il s'agit de la base canonique. De plus, si chaque colonne de la matrice A représente un vecteur, par exemple si la $1^{\text{ère}}$ colonne de A est associée à un vecteur x_1, la 2^{nde} à x_2 et la $3^{\text{ème}}$ à e_1, on écrira aussi bien $B = \{1, 2, 3\}$ que $B = \{x_1, x_2, e_1\}$.

Proposition 1.16 : L'ensemble des solutions de base est exactement l'ensemble des coordonnées du vecteur b dans toutes les bases extraites de A , *i.e.* $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$ est une solution de base ssi il existe une base extraite B de A telle que $x_B = b_{/B}$.

▷ **Démonstration :** *Il suffit de voir que $A_B^{-1} b$ représente les coordonnées de b dans la base de $\mathbb{R}^m$ formée par B. (A_B^{-1} est la matrice de passage de la base canonique vers la base B.)* ■

Remarque 1.17 : $\begin{pmatrix} b_{/B} \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$ est une solution de base réalisable ssi $b_{/B} \geq 0_m$.

1.2.3 Convexité

Définition 1.18 : Soient x et y deux points d'un domaine $\mathcal{D}$. On appelle **segment joignant x et y** l'ensemble des **combinaisons linéaires convexes** de x et de y :

$$\mathcal{S}(x, y) = \{\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Définition 1.19 : Un domaine $\mathcal{D}$ est dit **convexe** ssi $\forall x, y \in \mathcal{D},\ \mathcal{S}(x, y) \subset \mathcal{D}$.

Définition 1.20 : On dit que z est un **sommet** du domaine $\mathcal{D}$ ssi

$$\nexists x, y \in \mathcal{D} \setminus \{z\},\ z \in \mathcal{S}(x, y)$$

Théorème 1.21 : Soit $\mathcal{D}$ un domaine convexe. Tout point de $\mathcal{D}$ est combinaison linéaire convexe de $\mathcal{D}$.

1.2.4 Théorèmes

Théorème 1.22 : L'ensemble des solutions réalisables $\mathcal{D}_F$ forme un domaine convexe, autrement dit, pour toutes solutions réalisables x et y, $\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y$ est une solution réalisable, quelque soit $\lambda \in [0, 1]$.

▷ **Démonstration :** *Soient x et $y \in \mathcal{D}_F$:*

$$\begin{cases} A \cdot x = b & x \geq 0 \\ A \cdot y = b & y \geq 0 \end{cases}$$

Pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a :

$$\begin{cases} \lambda \cdot A \cdot x & = & \lambda \cdot b \\ (1-\lambda) \cdot A \cdot y & = & (1-\lambda) \cdot b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\big(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y\big) = b$$

et $x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \Rightarrow (\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \geq 0$, donc $(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \in \mathcal{D}_F$. ■

Théorème 1.23 : Les sommets de $\mathcal{D}_F$ sont exactement les solutions de base réalisables.

Remarque 1.24 : Les théorèmes 1.21 et 1.23 nous permettent d'affirmer que toute solution réalisable est combinaison linéaire convexe de solutions de base réalisable.

Théorème 1.25 : L'optimum de φ, s'il existe, est atteint en au moins un sommet de $\mathcal{D}_F$.

▷ **Démonstration :** *On considère le problème de maximisation. Pour celui de minimisation, il faut et il suffit de remplacer les $>$ par des $<$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe au moins une solution optimale x^* et qu'aucune solution optimale ne soit un sommet. Alors, d'après 1.21, il existe $s_1, \ldots, s_p$ sommets, différents de x^*, tels que :*

$$x^* = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot s_p$$

avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$. Comme x^* est optimal :

$$c^\top x^* > c^\top s_i \quad \forall i \in [\![1, p]\!]$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot c^\top x^* > \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot c^\top s_i \quad & \Leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) \cdot c^\top x^* > c^\top \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot s_i\right) \\ & \Leftrightarrow \quad c^\top x^* > c^\top x^* \end{aligned}$$

On aboutit à une absurdité. ■

Théorème 1.26 : Toute combinaison linéaire convexe de solutions optimales est une solution optimale.

2 Algorithme naïf

Remarque 2.27 : Les résultats précédents nous permettent d'affirmer que pour tout problème possédant au moins une solution optimale finie, il existe une solution de base réalisable optimale (et toute solution optimale est une combinaison linéraire convexe de solutions de base réalisables optimales). Autrement dit, on peut ne s'intéresser qu'aux solutions de bases.

Remarque 2.28 : On a vu que l'ensemble des solutions de bases est l'ensemble des coordonnées de b dans une base extraite de A, *i.e.* les solutions des systèmes linéaires

$$A_B \cdot x = b$$

pour toute base B extraite de A. Il existe C_n^m matrice carrée extraite de A (il y a C_n^m façon de choisir m colonnes parmi les n colonnes de A).
-

Algorithme 2.29 : Le nombre de bases extraites de A étant fini, on peut évaluer toutes les solutions de bases et les comparer, autrement dit, appliquer l'algorithme suivant :
- pour i allant de 1 à C_n^m faire :
  - (i) $B \leftarrow$ choisir m colonnes parmi les n colonnes de A (en excluant les choix des précédentes itérations)
  - (ii) si B est une base, *i.e.* si $det(A_B) \neq 0$, alors calculer les coordonnées de b dans la base B, autrement dit la solution de $A_B \cdot x = b$, c'est à dire $A_B^{-1} \cdot b$
  - (iii) si $A_B^{-1} \cdot b \geq 0$, alors
    - $x^{(i)} \leftarrow A_B^{-1} \cdot b$
    - $\varphi^{(i)} \leftarrow c^\top x^{(i)}$
- retourner x^* tel que $\varphi^* = \max_i(\varphi^{(i)})$

Remarque 2.30 : La complexité de cet algorithme est assez rédibitoire : il faut résoudre C_n^m systèmes linéaires d'ordre m, autrement dit, pour un problème posé sous forme canonique avec n variables et m contraintes, sachant que la forme simpliciale correspondante comportera $m + n$ variables, la complexité de l'algorithme sera de l'ordre de $O((m+n)^3 \times C_{n+m}^m)$. Le tableau suivant permet de se faire une idée de l'ordre de grandeur d'une telle quantité en fonction de n et de m :

n	m	$(m+n)^3 \times C_{n+m}^m$
2	1	81
2	2	384
3	1	256
3	2	1250
3	3	4320
4	1	625
4	2	3240
4	3	12005
4	4	35840
5	1	1296
5	2	7203
5	3	28672
5	4	91854
5	5	252000
6	1	2401
6	2	14336
6	3	61236
6	4	210000
6	5	614922
6	6	1596672

Exemple 2.31 : Soit le problème suivant :

$$P = \begin{cases} \max[\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 50 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 70 \cdot x_3 + 80 \cdot x_4] \\ 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 \leq 100 \\ 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 \leq 160 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

P s'écrit sous la forme standard simpliciale suivante :

$$P = \begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^7}[\varphi = c^\top x] \\ A \cdot x = b \\ x \geq 0_7 \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 6 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,7}(\mathbb{R}),$$

$$b = \begin{pmatrix} 100 \\ 160 \\ 20 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ c = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 70 \\ 80 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^7,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^7$$

Pour déterminer la solution, l'algorithme 2.29 a été implanté en matlab :

```
n = 7; m = 3;
nb_op = factorial(n)/(factorial(m)*factorial(n-m));
x = zeros(n,nb_op); phi = zeros(1,nb_op);
A     = [ 2  4  8  6  1  0  0
          10 8  6  10 0  1  0
          1  1  2  2  0  0  1];
b     = [ 100 ; 160 ; 20 ];
c     = [ 50 ; 40 ; 70 ; 80 ; 0 ; 0 ; 0 ];

ptr=0;
for i=1:n do
  for j=(i+1):n do
    for k=(j+1):n do
      ptr = ptr+1;
      B = [i;j;k];
      A_B = A(:,B); // A = [A(:,i) A(:,j) A(:,k)]
      if(det(A_B)~=0)
        sol = inv(A_B)*b;
        if(sol>=0)
          x(B,ptr) = sol;
          phi(ptr) = c'*x(:,ptr);
        else
          phi(ptr) = -%inf;
        end
      end
    end
  end
end

[phi_max indice] = max(phi)
x_opt = x(:,indice)
```

Le résultat est le suivant :

```
 phi_max  =
    920.

 x_opt  =
    12.
    0.
    0.
    4.
    52.
    0.
    0.
```

Autrement dit, la base optimale est $B^* = \{1,4,5\} = \{x_1, x_4, e_1\}$, $A_{B^*} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $x_{B^*} = A_{B^*}^{-1} b = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 52 \end{pmatrix}$ et la solution de base réalisable optimale est :

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 52 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore (il est inutile d'indiquer les valeurs correspondant aux variables d'écart car elles ne contribuent pas à la fonction-objectif) :

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \varphi(x^*) = 920$$

3 Méthode du simplexe

3.1 Principe de l'algorithme

Remarque 3.32 : Pour éviter de calculer les solutions de tous les systèmes linéaires $m \times m$ extraits de A, on a recours à un algorithme appelé **simplexe**. L'algorithme du simplexe repose sur la démarche suivante : on parcourt également l'ensemble des sommets de $\mathcal{D}_F$ mais l'on se donne le moyen de déterminer si le sommet en cours d'étude est optimal et si ce n'est pas le cas, on passe au sommet adjacent qui augmente le plus la fonction-objectif. En résumé, le simplexe procède comme suit :

(i) on recherche un sommet de départ

(ii) on teste si la fonction-objectif n'est pas bornée supérieurement, auquel cas le problème n'a pas de solution finie.

(iii) on détermine si ce sommet est l'optimum

(iv) si le sommet que l'on étudie n'est pas optimal, alors on se déplace sur un sommet voisin pour lequel la fonction-objectif diminue et l'on retourne à l'étape (ii) (ce qui correspond à échanger une variable hors base avec une variable de base).

3.2 Méthode générale

3.2.1 Recherche du sommet de départ

Soit P un problème[1] écrit sous forme canonique :

$$P = \begin{cases} \textit{(fonction-objectif)} & \max[\varphi = c^\top x] \\ \textit{(contraintes d'égalité)} & A \cdot x \leq b \\ \textit{(contraintes de positivité)} & x \geq 0_n \end{cases}$$

avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

[1]On traite ici le cas où le problème est un problème de maximisation. La résolution d'un problème de minimisation sera examinée ultérieurement.

Exprimer P sous forme standard permet d'obtenir directement une forme standard simpliciale :

$$P = \begin{cases} \textit{(fonction-objectif)} & \max[\varphi = \tilde{c}^\top \tilde{x}] \\ \textit{(contraintes d'égalité)} & \tilde{A} \cdot \tilde{x} = b \\ \textit{(contraintes de positivité)} & \tilde{x} \geq 0_{m+n} \end{cases}$$

avec

$$\tilde{A} = (\underbrace{I_m}_{\tilde{A}_B} \mid \underbrace{A}_{\tilde{A}_H}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,m+n}(\mathbb{R}),$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \ \tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n} \text{ et } \tilde{x} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}.$$

On a donc :

$$\tilde{x}_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{x}_H = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La solution de base réalisable « triviale » est (proposition 1.14) :

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_B^{-1} \cdot b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$$

soit $\tilde{x}_B = b$ et $\tilde{x}_H = 0_{n-m}$.

3.2.2 Changement de base

Soit $B = \{e_1, \dots, e_m\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. On souhaite étudier les conséquences engendrées par le changement d'un des vecteurs de la base : *i.e.* par le remplacement d'un des vecteurs de B, noté e_s, par un vecteur quelconque $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^m$. En premier lieu, il est nécessaire de vérifier que l'ensemble $B' = B \setminus \{e_s\} \cup \{v\}$ est bien une base. B' est une base ssi

$$det(B') = det \begin{pmatrix} 1 & & & v_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & v_s & & & \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & v_m & & & 1 \end{pmatrix}$$

on rappelle que la permutation de deux lignes (ou deux colonnes) multiplie le déterminant par -1, donc deux permutation successives ne changent pas la valeur du déterminant, en particulier, si l'on permute la $s^{\text{ème}}$ colonne avec la dernière colonne puis la $s^{\text{ème}}$ ligne avec la dernière ligne, on obtient :

$$det(B') = det \begin{pmatrix} 1 & & & & & & v_1 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & \vdots \\ & & & 1 & & & v_m \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 1 & \vdots \\ & & & & & & v_s \end{pmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes diagonaux, soit : $det(B') = v_s$. Autrement dit, B' est une base ssi $v_s \neq 0$.
On suppose donc désormais que $v_s \neq 0$. Comme e_s n'appartiendra plus à la base, il faut déterminer ses coordonnées dans la nouvelle base. Comme v est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ et B la base canonique de $\mathbb{R}^m$, on a :

$$v = \sum_{i=1}^{m} v_i \cdot e_i = \sum_{i=1,\ i\neq s}^{m} v_i \cdot e_i + v_s \cdot e_s$$
$$\Leftrightarrow e_s = \frac{1}{v_s}\left(v - \sum_{i=1,\ i\neq s}^{m} v_i \cdot e_i\right)$$

Soit z un vecteur de $\mathbb{R}^m$ dont les coordonnées dans la base canonique sont $z_1, \ldots, z_m$. On cherche les coordonnées de z dans la nouvelle base B' :

$$\begin{aligned} z = \sum_{i=1}^{m} z_i \cdot e_i &= \sum_{i=1,\ i\neq s}^{m} z_i \cdot e_i + z_s \cdot e_s \\ &= \sum_{i=1,\ i\neq s}^{m} z_i \cdot e_i + z_s \cdot \frac{1}{v_s}\left(v - \sum_{i=1,\ i\neq s}^{m} v_i \cdot e_i\right) \\ &= \sum_{i=1,\ i\neq s}^{m} \left(z_i - \frac{v_i}{v_s} z_s\right) \cdot e_i + \frac{z_s}{v_s} \cdot v \end{aligned}$$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3.33 : Les coordonnées de z dans la base B' sont :

$$z_{/B'} = \begin{pmatrix} z_1 - \frac{v_1}{v_s} z_s \\ \vdots \\ \frac{z_s}{v_s} \\ \vdots \\ z_m - \frac{v_m}{v_s} z_s \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage de B vers B' est :

$$B'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & v_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & v_s & & & \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & v_m & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & -\frac{v_1}{v_s} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & \frac{1}{v_s} & & & \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -\frac{v_m}{v_s} & & & 1 \end{pmatrix}$$

On a vu que les solutions de bases réalisables correspondent aux coordonnées positives de b dans les différentes bases. Pour que

$$\begin{cases} b_i - \dfrac{v_i}{v_s}\, b_s & (\forall i \neq s) \\ \dfrac{b_s}{v_s} & \end{cases}$$

soit une solution de base réalisable, il faut nécessairement que

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, m]\!]\,,\ b_i - \frac{v_i}{v_s}\, b_s \geq 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, m]\!]\,,\ b_i \geq \frac{v_i}{v_s}\, b_s \\ & \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, m]\!]\,,\ \frac{b_i}{v_i} \geq \frac{b_s}{v_s} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{b_s}{v_s} = \min_{i \in [\![1, m]\!]} \left\{ \frac{b_i}{v_i} \right\} \end{aligned}$$

et que $v_s > 0$ (puisque $\dfrac{b_s}{v_s} \geq 0,\ b_s \geq 0$ et $v_s \neq 0$). Donc la variable qui doit sortir de la base est entièrement déterminée par la variable que l'on fait entrer dans la base. Pour déterminer la variable qui doit entrer dans la base, on étudie la variation de la fonction-objectif engendrée par ce changement base :

$$\begin{aligned}
\varphi\left(b_{/B'}\right) &= c_B^\top b_{/B'} = \sum_{i=1,\ i\neq s}^{m}\left(b_i - \frac{v_i}{v_s}b_s\right)\cdot c_i + \frac{b_s}{v_s}\cdot c_v \\
&= \sum_{i=1,\ i\neq s}^{m} b_i\cdot c_i - \sum_{i=1,\ i\neq s}^{m}\frac{v_i}{v_s}b_s\cdot c_i + \frac{b_s}{v_s}\cdot c_v \\
&= \sum_{i=1,\ i\neq s}^{m} b_i\cdot c_i - \sum_{i=1}^{m}\frac{v_i}{v_s}b_s\cdot c_i + \frac{v_s}{v_s}b_s\cdot c_v \\
&= \sum_{i=1,\ i\neq s}^{m} b_i\cdot c_i + b_s\cdot c_s - \sum_{i=1}^{m}\frac{v_i}{v_s}b_s\cdot c_i + \frac{b_s}{v_s}\cdot c_v \\
&= \sum_{i=1}^{m} b_i\cdot c_i - \sum_{i=1}^{m}\frac{v_i}{v_s}b_s\cdot c_i + \frac{b_s}{v_s}\cdot c_v \\
&= \varphi(b_{/B}) + \frac{b_s}{v_s}\cdot c_v - \sum_{i=1}^{m}\frac{v_i}{v_s}b_s\cdot c_i \\
&= \varphi(b_{/B}) + \frac{b_s}{v_s}\left(c_v - \sum_{i=1}^{m} v_i\cdot c_i\right)
\end{aligned}$$

L'augmentation de la fonction-objectif sera la plus importante en choisissant v réalisant :

$$\max\left(c_v - \sum_{i=1}^{m} v_i\cdot c_i\right) = \max\left(c_v - c_B^\top v_{/B}\right)$$

avec $c_v - \varphi(v) > 0$ (sinon la fonction-objectif va diminuer).

Remarque 3.34 : Les calculs précédents ont permis de déterminer
- un critère de choix de la variable entrante
- un critère de choix de la variable sortante
- un critère d'optimalité

Proposition 3.35 : Soit $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix}$ une solution de base réalisable associée à une base B.
- x est une solution de base réalisable optimale ssi pour toute variable hors base v
$$L_H(v) = c_v - c_B^\top v_{/B} \leq 0$$
- si x n'est pas une solution de base réalisable, la base B est remplacée par la base
$$B' = B \cup \{v_e\} \setminus \{v_s\}$$
où v_e et v_s sont déterminés par les conditions suivantes :
  - (i) v_e est la variable hors base vérifiant :
  $$L_H(v_e) = \max\{L_H(v) \mid L_H(v) > 0\}$$
  - (ii) v_s est la variable de base vérifiant :
  $$\frac{b_s}{v_e(s)} = \min_{i\in[\![1,m]\!]}\left\{\frac{b_i}{v_e(i)} \mid v_e(i) > 0\right\}$$

3.3 Algorithme

3.3.1 Problème de maximisation avec contraintes de majoration

Données de départ : Soit un problème P énoncé sous forme canonique pure :

$$P = \begin{cases} \textit{(fonction-objectif)} & \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n}[\varphi = c^\top x] \\ \textit{(contraintes d'inégalité)} & A\cdot x \leq b \\ \textit{(contraintes de positivité)} & x \geq 0_n \end{cases}$$

avec

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Étape 1 : On commence par mettre le problème sous forme standard simpliciale. Pour cela, on introduit des variables dites variables d'écart permettant l'expression des contraintes sous la forme d'un système d'équations linéaires. Le problème P devient alors :

$$P = \begin{cases} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n}[\varphi = c^\top x] \\ A\cdot x = b \\ x \geq 0_n \end{cases}$$

avec

$$c \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n},\ x \leftarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$A \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & & 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,m+n}(\mathbb{R}) \text{ et } B \leftarrow \{1, 2, \dots, m\}$$

On a :

$$A = (\ A_B \mid A_H\ )$$

avec $A_B = I_m \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ et $A_H = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix}$

avec $x_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ et $x_H = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Étape 2 : Recherche d'une solution de base réalisable initiale. Comme nous l'avons vu plus haut, $x = \begin{pmatrix} A_B^{-1}\, b \\ 0_n \end{pmatrix}$ est une solution de base réalisable. Comme $A_B = I_m$, la solution de base réalisable de départ est $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0_n \end{pmatrix}$.

Définition 3.39 : Pour permettre une exploitation de l'algorithme « à la main », on introduit un tableau comportant l'ensemble des données du problème disposées de façon à faciliter l'application des différentes étapes. Ce tableau se présente comme suit :

Variables de base B	Variables hors base H	b
$[A_B]_{/B}$	$[A_H]_{/B}$	$b_{/B}$
	$L_{H_{/B}}$	$\varphi(b_{/B})$

Chaque étape du simplexe correspond à l'étude de ces différentes données relativement à la base B choisie. Á chaque étape, on peut soit calculer ces différentes informations directement :

$$\begin{cases} [A_B]_{/B} = A_B^{-1}\, A_B \\ [A_H]_{/B} = A_B^{-1}\, A_H \\ b_{/B} = A_B^{-1}\, b \\ \varphi(b_{/B}) = c_B^\top\, b_{/B} \\ [L_H]_{/B} = c_H - c_B^\top\, A_B^{-1}\, A_H = c_H - c_B^\top\, [A_H]_{/B} \end{cases}$$

soit de façon itérative à partir de la base de travail précédente, compte-tenu du fait que deux bases successives ne diffèrent que d'un seul vecteur, ce qui facilite considérablement les calculs comme il l'a été montré dans la section précédente. C'est cette seconde méthode que nous adopterons.

Remarque 3.40 : Avant de passer à l'étape suivante, rappelons le fonctionnement général de l'algorithme du simplexe :

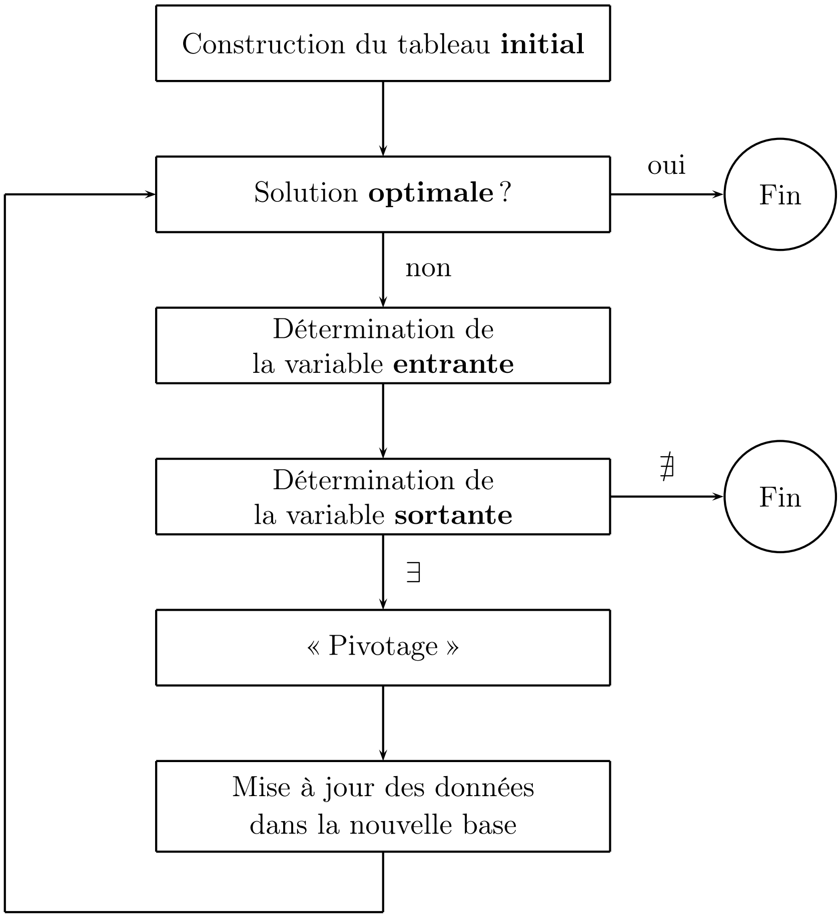

Schéma général de l'algorithme du simplexe

Étape 3 : Construction du tableau initial.
Les données à l'initialisation sont les suivantes :
- $B \leftarrow e_1, \dots, e_m$
- $A_B \leftarrow I_m$

On a donc le tableau suivant :

Variables de base B $e_1, \dots, e_m$	Variables hors base H $x_1, \dots, x_n$	
$A_B = I_m$	A_H	b
	$L_H = c_H$	$\varphi(b) = 0$

Étape 4 : Vérification de l'optimalité de la solution.
Sauf cas dégénéré, la solution est optimale ssi $L_H \leq 0$. Si tel est le cas, on arrête la procédure.

Étape 5 : Choix de la variable entrante.
La variable entrante est la variable hors base v_e vérifiant :

$$L_H(v_e) = \max \{L_H(v) \mid L_H(v) > 0\}$$

(C'est à dire la variable correspondant à plus grande valeur positive de la dernière ligne du tableau)

Étape 6 : Choix de la variable sortante.
La variable sortante est la variable de base v_s vérifiant :

$$\frac{b_s}{v_e(s)} = \min_{i \in [\![1,m]\!]} \left\{ \frac{b_i}{v_e(i)} \mid v_e(i) > 0 \right\}$$

Étape 7 : Pivotage.
Une fois déterminées les variables entrante et sortante, on permute leurs colonnes respectives :

$$B \leftarrow B \cup \{v_e\} \setminus \{v_s\}$$

Étape 8 : Changement de base.
Les variables de bases (B) ont changé, il faut donc calculer l'ensemble des données dans cette nouvelle base, autrement dit calculer A_B^{-1} et multiplier chaque matrice (A_B, A_H et b) par A_B^{-1} à gauche. L'algorithme de Gauss-Jordan nous fournit un moyen simple d'effectuer ces deux opérations simultanément.

Remarque 3.47 : Soit $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ une matrice :

$$M = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & \dots & x_{m,m} \end{pmatrix}$$

Calculer M^{-1}, c'est chercher l'unique matrice P telle que

$$P \times M = I_m$$

La matrice P contient l'ensemble des combinaisons linéaires à appliquer sur les lignes de M pour obtenir l'identité. Ainsi, multiplier une matrice Q à gauche par P consiste à appliquer ces mêmes combinaisons linéaires sur les lignes de Q. Autrement dit, pour obtenir la matrice $(\, M^{-1} M \mid M^{-1} Q \,)$ à partir de $(\, M \mid Q \,)$, il faut et il suffit d'appliquer sur les lignes de $(\, M \mid Q \,)$ les combinaisons linéaires permettant d'obtenir I_m à la place de M.

Étape 9 : Mise à jour des coûts réduits et de $\varphi(b)$.
On admet la propriété suivante :

$$\forall v,\ L_{H_{/B'}}(v) = L_{H_{/B}}(v) - L_{H_{/B}}(e).v_{/B'}(s)$$

où e (resp. s) est l'indice de la variable entrante (resp. sortante). Effectuer cette mise à jour pour tous les vecteurs revient à ajouter à L_H une combinaison linéaire des lignes de $(\, A'_B \mid A'_H \mid b' \,)$ telle que $L_{H_{/B'}}(e) = 0$. Sachant que $\varphi(b_{/B'}) = \varphi(b_{/B}) + \underbrace{\frac{b_s}{v_e(s)}}_{b'_s} L_{H_{/B}}(e)$,

la mise à jour de la fonction-objectif se fait de la même façon que les coûts réduits.

Résultat final : Le résultat final est directement lisible à partir du dernier tableau du simplexe : $x_{B^*} = b_{/B*}$.

Exemple 3.50 : Soit le tableau suivant :

Base B			Hors base H				
x_3	e_3	x_1	x_2	e_2	x_4	e_1	$b_{/B}$
1	0	0	2	5	8	9	2
0	1	0	1	2	5	0	9
0	0	1	9	8	4	1	12
			-2	-7	-4	-1	$\varphi(b) = 14$

La solution du problème dont ce tableau représente la dernière étape du simplexe est : $B^* = \{x_3, e_3, x_1\}$, $x_{B^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ donc :

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Cas général

Remarque 3.51 : La méthode précédente vaut lorsque le problème comporte uniquement des contraintes de majoration. Lorsque le problème est posé sous sa forme la plus générale, *i.e.* lorsque les contraintes sont soit des contraintes de majoration, de minoration ou d'égalité, les premières étapes diffèrent du cas précédemment exposé. Soit un problème linéaire posé sous sa forme la plus générale :

$$\min \;ou\; \max(\varphi = c_1\,x_1 + \ldots + c_n\,x_n)$$

$$s.c. \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & \ldots & + & a_{1,n}\,x_n & \geq & b_1 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{k,1}\,x_1 & + & \ldots & + & a_{k,n}\,x_n & \leq & b_k \\ & & \vdots & & & & \\ a_{p,1}\,x_1 & + & \ldots & + & a_{p,n}\,x_n & = & b_p \\ & & \vdots & & & & \end{array} \right.$$

$$x_1, \ldots, x_n \geq 0$$

1. On pose le problème sous forme **standard**, *i.e.* où les contraintes s'expriment sous la forme d'égalités. Pour cela, on s'autorise l'introduction de variables d'écart :

$$\min \;ou\; \max(\varphi = c_1\,x_1 + \ldots + c_n\,x_n)$$

$$
s.c. \left\{ \begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}\,x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}\,x_n & - & e_1 & = & b_1 \\
 & & \vdots & & & & & & \\
a_{k,1}\,x_1 & + & \dots & + & a_{k,n}\,x_n & + & e_k & = & b_k \\
 & & \vdots & & & & & & \\
a_{p,1}\,x_1 & + & \dots & + & a_{p,n}\,x_n & & & = & b_p \\
 & & \vdots & & & & & &
\end{array} \right.
$$

$$
x_1, \dots, x_n, e_1, \dots, e_{p-1} \geq 0
$$

2. Une fois mis sous forme standard, on exprime le problème sous forme standard **simpliciale**, *i.e.* telle que la matrice des contraintes A contienne l'identité. Pour cela, on observe la matrice A :

$$
A = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & & x_n & e_1 & e_{k-1} & e_k & e_{p-1} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & -1 & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & & & \\
a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} & & & -1 & & & \\
a_{k,1} & \dots & a_{k,n} & & & & 1 & & \\
\vdots & & \vdots & & & & & \ddots & \\
a_{p-1,1} & \dots & a_{p-1,n} & & & & & & 1 \\
a_{p,1} & \dots & a_{p,n} & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \\
a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & & & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Deux cas sont possibles :

- tous les vecteurs canoniques apparaîssent dans la matrice A : on débute alors l'algorithme du simplexe de la même façon que dans la section précédente en prenant pour base initiale B l'ensemble des variables dont la colonne dans A est canonique, *i.e.* telle que $A_B = I_m$.
- la matrice A ne contient pas la matrice identité : on ne peut pas débuter l'algorithme du simplexe. On ajoute alors « artificiellement » à A les vecteurs canoniques qui lui manquent et on note a_i les variables associées. Par exemple, s'il n'existe pas de variable x telle que A_x (la colonne associée à x) soit canonique, alors on obtient les nouvelles variables suivantes :

$$
A = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} x_1 & & x_n & e_1 & e_{k-1} & e_k & e_{p-1} & a_1 & a_{k-1} & a_p \quad a_m \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \quad \downarrow \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccc|ccccc}
a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & -1 & & & & & & 1 & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & & \ddots & & & \\
a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} & & & -1 & & & & & & 1 & & \\
a_{k,1} & \dots & a_{k,n} & & & & 1 & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & & \ddots & & & & & & \\
a_{p-1,1} & \dots & a_{p-1,n} & & & & & & 1 & & & & & \\
a_{p,1} & \dots & a_{p,n} & & & & & & & & & & 1 & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & & & & & \ddots \\
a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

La base initiale est alors $B = \{a_1, \dots, a_{k-1}, e_k, \dots, e_{p-1}, a_p, \dots, a_m\}$ et on a alors $A_B = I_m$. S'il existe une variable dont la colonne est canonique dans A, par exemple

x_1, alors il ne faut pas ajouter de variable artificielle pour obtenir ce même vecteur canonique. Admettons que A_{x_1} soit le $p^{\text{ième}}$ vecteur canonique, alors il ne faut pas créer la variable a_p :

$$A = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccc}
x_1 & x_2 & & x_n & e_1 & & e_{k-1} & e_k & & e_{p-1} & a_1 & & a_{k-1} & a_{p+1} & & a_m \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow
\end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccc|cccccc}
 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & -1 & & & & & & 1 & & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & & \ddots & & & & \\
 & a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,n} & & & -1 & & & & & & 1 & & & \\
 & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & & & & \ddots & & & & & & & \\
 & a_{p-1,2} & \cdots & a_{p-1,n} & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} & & & & & & & & & & & & \\
 & a_{p+1,2} & \cdots & a_{p+1,n} & & & & & & & & & & 1 & & \\
 & \vdots & & \vdots & & & & & & & & & & & \ddots & \\
 & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & & & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\end{array}$$

On prend alors pour base initiale $B = \{a_1, \ldots, a_{k-1}, e_k, \ldots, e_{p-1}, x_p, a_{p+1}, \ldots, a_m\}$, on peut alors débuter l'algorithme du simplexe. Seulement, en créant de nouvelles variables, on a modifié notre problème de départ. Le problème correspondant à cette nouvelle matrice A est équivalent au problème initial si et seulement si $a_1 = \ldots = a_m = 0$. Il faut donc, avant de résoudre le problème de départ, résoudre un problème dit « auxilaire » :

$$\min\left[\varphi_{aux} = a_1 + \ldots + a_m\right]$$

soit $\varphi_{aux} = c_{aux}^{\top} x_{aux}$ avec

$$c_{aux} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } x_{aux} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{p-1} \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Si la solution optimale de ce problème auxiliaire est telle que $\varphi_{aux}^* \neq 0$, *i.e.* telle que $\exists k,\ a_k^* \neq 0$, alors le problème initial n'a pas de solution : $\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \varnothing$, sinon (si $a_1^* = \ldots = a_m^* = 0$) il possède au moins une solution réalisable optimale.

Étape 0 : On formule le problème sous forme standard simpliciale conformément à la remarque précédente. Si aucune variable artificielle n'est nécessaire pour obtenir cette forme, alors aller directement à la **phase 2**, sinon, aller en **phase 1**.

Phase 1 - Étape 1 : On commence par résoudre le problème auxiliaire. La base initiale est la base B telle que $A_B = I_m$.

Phase 1 - Étape 2 : Construction du tableau initial. Le tableau est construit de la même manière que dans la méthode précédente.

Variables de base B $\ldots, a_k, \ldots$	Variables hors base H	
$A_B = I_m$	A_H	b
$(\ldots \mid 1 \mid \ldots)$	$(0 \mid \ldots \mid 0)$	–

où la dernière ligne est initialisée avec les valeurs de c_{aux}.

Phase 1 - Étape 3 : On remarque les coûts correspondant à certaines variables de base (les variables artificielles) sont non nuls : il ne s'agit donc pas des coûts réduits, on procéde donc à un calcul des coûts réduits dès l'initialisation :

Variables de base B $\ldots, a_k, \ldots$	Variables hors base H	
$A_B = I_m$	A_H	b
$(\ldots \mid 1 \mid \ldots)$	$(0 \mid \ldots \mid 0)$	–
	L_H	$\varphi_{aux}(b)$

Remarque 3.56 : Le but de cette phase 1 est de trouver une base B^* dans laquelle les variables artificielles sont nulles, autrement dit une base B^* telle que toutes les variables artificielles appartiennent à H^*.

Phase 1 - Étape 4 : Choix de la variable entrante.
φ_{aux} étant à minimiser, on choisit la variable entrante $v_e \in H$ telle que $L_H(e)$ soit le plus négatif possible.

Phase 1 - Étape 5 : Toutes les autres étapes du simplexe sont les mêmes que dans la méthode précédente. Si $\varphi^*_{aux} = 0$, alors aller en phase 2, sinon, le problème initial n'a pas de solution : $\mathcal{D}_R = \varnothing$.

Phase 2 - Étape 1 : On peut donc enfin débuter la résolution de notre problème d'origine. Le tableau initial est obtenu à partir du tableau final du problème auxiliaire en supprimant les variables artificielles et en réinitialisant les coûts réduits avec les coûts réels de la fonction-objectif φ (on remplace la dernière ligne par les coefficients des variables dans la fonction-objectif de départ : c_i pour les x_i et 0 pour les variables d'écart).

Phase 2 - Étape 2 : On poursuit l'algorithme du simplexe à partir du tableau obtenu à l'étape précédente. Le critère de détermination de la variable entrante est :
- pour un problème de maximisation : $v_e \in H$ telle que
$$L_H(v_e) = \max\{L_H(v) \mid L_H(v) > 0\}$$
- pour un problème de minimisation : $v_e \in H$ telle que
$$L_H(v_e) = \min\{L_H(v) \mid L_H(v) < 0\}$$

Le critère de détermination de la variable sortante reste le même quelque soit la nature du problème : $v_s \in B$ telle que

$$\frac{b_s}{v_e(s)} = \min_{i \in [\![1,m]\!]} \left\{ \frac{b_i}{v_e(i)} \mid v_e(i) > 0 \right\}$$

3.3.3 Cas remarquables

Remarque 3.61 : Le déroulement de l'algorithme du simplexe peut présenter quatre cas particuliers. Nous allons voir à quoi ils correspondent et comment poursuivre quand cela est possible.
- **Cas 1 :** Si dans la phase 1 d'un problème auxiliaire on se retrouve avec $L_H \geq 0$ et $\varphi_{aux} > 0$, alors 0 n'est pas optimum de φ_{aux} donc le problème initial n'a pas de solution réalisable et donc pas de solution optimale ($\mathcal{D}_R = \varnothing$).
- **Cas 2 :** Si la solution optimale est elle que $a_m \in B^*$ mais que $a_m^* = 0$, alors on peut trouver une solution optimale avec $a_m \in H$ en faisant sortir a_m de la base ($v_s = a_m$) et en faisant entrer n'importe quel vecteur v_e de H tel que $v_e(s) \neq 0$ (cns pour que B soit une base).
- **Cas 3 :** Si lors du choix aucune variable en base ne satisfait au critère de choix de la variable sortante, alors il n'y a pas d'optimum fini pour le problème : l'optimum est infini.
- **Cas 4 :** Si lors du choix de la variable entrante on a $L_H(e) = \max\{L_H(v) \mid v \in H\} = 0$, alors il y a plusieurs solutions de base optimales et l'ensemble des solutions optimales est alors caractérisée par les segments joignant ces solutions de base deux à deux.

4 Analyse de sensibilité postoptimale

Le but de l'analyse postoptimale est d'estimer l'influence du changement de certains paramètres d'un programme linéaire sur la structure et la valeur d'une solution optimale, autrement dit, on désire connaître les plages de variations des données pour lesquelles la solution reste optimale sans avoir à tout recalculer via un simplexe.

Remarque 4.62 : Il existe deux types d'analyse postoptimale :
- l'analyse standard (une seule donnée varie)
- l'analyse paramétrée (plusieurs données varient de façon liée)

Remarque 4.63 : Les variations étudiées ont lieu sur les coûts (c) et sur le vecteur des contraintes (b).

4.1 Caractérisation de l'optimum

Remarque 4.64 : On rappelle la notation $[L_H]_{/B} = c_H - c_B^\top [A_H]_{/B}$ qui représente les coûts réduits dans une certaine base (dernière ligne du tableau du simplexe à une certaine étape) et $[L_H]_{/B*} = c_{H^*} - c_{B^*}^\top [A_{H^*}]_{/B*}$ pour la base optimale (dernière étape).

Remarque 4.65 : On rappelle les conditions d'optimalité et de faisabilité :
- **Condition d'optimalité** : dans le cas d'un problème de maximisation (resp. minimisation), la base B^* est optimale ssi $[L_H]_{/B*} \leq 0$ (resp. $[L_H]_{/B*} \geq 0$).
- **Condition de faisabilité (réalisabilité)**. Une solution de base optimale est réalisable ssi elle est positive : $x_{B^*} \geq 0$

4.2 Analyse postoptimale de l'objectif

L'analyse postoptimale de l'objectif consiste à étudier les variations des coefficients de la fonction objectif (c) préservant la condition d'optimalité (la variation de c n'affectant pas la condition de faisabilité).

4.2.1 Analyse standard

L'analyse standard consiste à remplacer l'un des coefficients c_i de la fonction-objectif par une variable qu'on notera δ :

$$(c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_n) \to (c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, \delta, c_{i+1}, \ldots, c_n)$$

puis d'analyser les valeurs de δ préservant l'optimalité. En somme, il s'agit de réévaluer les coûts réduits en fonction de δ relativement à la base optimale B^* précédemment déterminée :

$$[L_H]_{/B*} = c_{H^*} - c_{B^*}^\top [A_{H^*}]_{/B*}$$

Le vecteur $[L_H]_{/B*}$ s'exprime en fonction de δ, il suffit alors d'exprimer la contrainte d'optimalité $[L_H]_{/B*} \leq 0$. On obtient un système d'équations dont on tire un intervalle correspondant à la plage de variation de δ pour laquelle B^* est toujours la base optimale.

4.2.2 Analyse paramétrée

De la même façon, on remplace le vecteur c par un vecteur $c(\lambda)$ dont tous les termes sont fonction de λ. On procède ensuite de la même façon que pour l'analyse standard.

4.3 Analyse postoptimale du second membre

L'analyse postoptimale de l'objectif consiste à étudier les variations des coefficients de contraintes (b) préservant la condition de faisabilité (la variation de b n'affectant pas la condition d'optimalité tant que l'on ne sort pas du domaine réalisable, *i.e.* tant que la condition de faisabilité est assurée), *i.e.* telles que x_{B^*} reste positif. La relation $x_{B^*} = A_{B^*}^{-1}\, b$ permet une réévaluation rapide de x_{B^*} sous reserve de détenir $A_{B^*}^{-1}$.

Proposition 4.66 : On rappelle que la matrice $P_{B_i \to B_{i+1}}$ contenant les combinaisons linéaires de l'algorithme de Gauss Jordan permettant d'exprimer les données dans la base B_{i+1} à partir de l'expression des données dans la base B_i représente la matrice de passage de la base B_i à la base B_{i+1}. En remarquant que $A_{B^*}^{-1}$ est la matrice de passage de la base canonique à lase B^*, on peut donc la déterminer simplement à partir des matrice de passage de chacune des bases intermédiaires :

$$A_{B^*}^{-1} = P_{can \to B^*} = P_{B_n \to B^*} \times P_{B_{n-1} \to B_n} \dots P_{B_1 \to B_{B_2}} \times P_{can \to B_1}$$

où *can* représente la base canonique.

4.3.1 Analyse standard

L'analyse standard consiste à remplacer l'un des b_i dans b par une variable qu'on notera δ :

$$(\, d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i, d_{i+1}, \dots, d_n \,) \to (\, d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, \delta, d_{i+1}, \dots, d_n \,)$$

On calcule ensuite $x_{B^*} = A_{B^*}^{-1}\, b$ à l'aide de la proposition précédente puis l'inégalité $x_{B^*} \geq 0$ nous fournit un système donnant l'intervalle dans lequel peut varier δ pour que x_{B^*} reste solution optimale. L'optimum de la fonction-objectif φ^*_{max} s'obtient alors, en fonction de δ, par la relation $\varphi^*_{max}(\delta) = c_{B^*}^\top\, x_{B^*}(\delta)$

5 Dualité

Définition 5.67 : À chaque problème linéaire P dit « primal » on peut associer un autre problème linéaire appelé « dual » et noté P^* tel que :

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} & \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} [\varphi = c^\top x] \\ s.c. & A \cdot x \leq b \\ & x \geq 0_n \end{array} \right.$$

et

$$P^* = \left\{ \begin{array}{ll} & \min\limits_{y \in \mathbb{R}^m} [\psi = b^\top y] \\ s.c. & A^\top\, y \geq c^\top \\ & y \geq 0_m \end{array} \right.$$

Le problème primal possède donc n variables et m contraintes tandis que son dual possède m variables et n contraintes.

Remarque 5.68 : La dualité est involutive : $(P^*)^* = P$.

Théorème 5.69 : *(Théorème de la dualité)* Soient x^* et y^* deux solutions réalisables optimales duales, alors

$$\varphi_{max} = c^\top x^* \quad = \quad \psi_{min} = b^\top y^*$$

▷ **Démonstration :** *On note $\omega = y^\top\, A\, x \in\ \mathbb{R}$. Comme ω est un scalaire, on a : $\omega = \omega^T$ donc $y^\top\, A\, x = (y^\top\, A\, x)^\top = x^\top\, A^\top\, y$. De plus, on a*

$$\varphi \leq \omega \leq \psi$$

donc $c^\top\, x \leq y^\top\, A\, x \leq b^\top\, y$. A l'optimum (s'il existe), on a $\max\limits_x[\varphi] = \omega^* = \min\limits_y[\psi]$. ■

Remarque 5.70 : Les correpondances « primal-dual » permettent à partir d'une solution optimale d'un problème donné d'en déduire une solution optimale du problème dual.

Proposition 5.71 : Soit x^* l'optimal d'un problème P et $\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}.y_i \leq c_j \mid j \in [\![1, m]\!]\right\}$ l'ensemble des contraintes du problème dual. Quelque soit j, deux cas et uniquement deux sont possibles :

- soit $x_j^* = 0$
- soit $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.y_i = c_j$

Remarque 5.72 : On en déduit que

$$\begin{array}{rcccl} x_j^* > 0 & \Rightarrow & \sum_i a_{i,j}.y_i = c_j & \Leftrightarrow & \epsilon_j = 0 \\ \epsilon_j > 0 & \Leftrightarrow & \sum_i a_{i,j}.y_i > c_j & \Rightarrow & x_j^* = 0 \end{array}$$

En pratique, il faut retenir les implications suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \text{Primal} & \Rightarrow & \text{Dual} \\ e_i^* > 0 & \Rightarrow & y_i^* = 0 \\ x_i^* > 0 & \Rightarrow & \epsilon_i^* = 0 \Leftrightarrow \sum_i a_{i,j}.y_i^* = c_j \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Dual} & \Rightarrow & \text{Primal} \\ \epsilon_i^* > 0 & \Rightarrow & x_i^* = 0 \\ y_i^* > 0 & \Rightarrow & e_i^* = 0 \Leftrightarrow \sum_j a_{i,j}.x_j^* = b_i \end{array}$$

Remarque 5.73 : Le système d'égalité obtenu duquel on retire les variables dont on a prouvé la nullité doit être facilement résoluble, nous donnant la solution de base optimale du dual du problème initialement posé.

Théorème 5.74 : *(Théorème d'existence)* Soit P un problème et P^* son dual, on a :

(i) P n'a pas de solution réalisable $\Rightarrow$ P^* n'a pas d'optimum fini

(ii) P n'a pas d'optimum fini $\Rightarrow$ P^* n'a pas de solution réalisable

(iii) P a une solution de base réalisable optimale finie $\Rightarrow$ P^* aussi

6 Exemples

Vous trouverez dans cette section quelques exemples de déroulement de simplexes. Les interprétations, conclusions et détails des calculs intermédiaires n'y figurent pas.

6.1 Exemple 1

Problème :

$$\max\left[\varphi = 1\,x_1 - 1\,x_2 - 2\,x_3\right]$$

$$s.c.\ \begin{cases} 1\,x_1 + 2\,x_2 + 1\,x_3 = 0 \\ 2\,x_1 + 1\,x_2 + 4\,x_3 \leq 6 \\ 1\,x_1 + 2\,x_2 + 0\,x_3 \geq 1 \end{cases}$$

Forme standard simpliciale :

$$\max\left[\varphi = 1\,x_1 - 1\,x_2 - 2\,x_3\right]$$

$$s.c.\ \begin{cases} 1\,x_1 + 2\,x_2 + 1\,x_3 + 0\,e_1 + 0\,e_2 + 1\,a_1 + 0\,a_2 = 0 \\ 2\,x_1 + 1\,x_2 + 4\,x_3 + 1\,e_1 + 0\,e_2 + 0\,a_1 + 0\,a_2 = 6 \\ 1\,x_1 + 2\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,e_1 - 1\,e_2 + 0\,a_1 + 1\,a_2 = 1 \end{cases}$$

Phase 1 : résolution du problème auxiliaire

$$\min\left[\varphi_{aux} = 1\,a_1 + 1\,a_2\right]$$

Base B			Hors base H				
a_1	e_1	a_2	x_1	x_2	x_3	e_2	$b_{/B}$
1	0	0	1	2	1	0	0
0	1	0	2	1	4	0	6
0	0	1	1	2	0	-1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
			-2	-4	-1	1	1

$\rightarrow$ variable entrante : x_2
$\rightarrow \min\limits_{\geq 0}\left(0, 6, 1/2 \mid x_2(s) > 0\right) \Rightarrow$ variable sortante : a_1
a_1 est supprimée

Base B			Hors base H			
x_2	e_1	a_2	x_1	x_3	e_2	$b_{/B}$
1	0	0	1/2	1/2	0	0
0	1	0	3/2	7/2	0	6
0	0	1	0	-1	-1	1
-4	0	0	-2	-1	1	1
			0	1	1	1

$\rightarrow$ l'optimum de la fonction auxiliaire est non nul $\varphi_{aux} \neq 0$: il n'existe pas de solution réalisable au problème initial, i.e. $\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \varnothing$.

6.2 Exemple 2

Problème :

$$\max\,[\varphi = 1\,x_1 - 1\,x_2 + 2\,x_3]$$

$$s.c. \begin{cases} 1\,x_1 + 2\,x_2 + 1\,x_3 = 5 \\ 2\,x_1 + 1\,x_2 + 0\,x_3 \leq 6 \\ 1\,x_1 + 2\,x_2 + 0\,x_3 \geq 4 \end{cases}$$

Forme standard simpliciale :

$$\max\,[\varphi = 1\,x_1 - 1\,x_2 + 2\,x_3]$$

$$s.c. \begin{cases} 1\,x_1 + 2\,x_2 + 1\,x_3 + 0\,e_1 + 0\,e_2 + 0\,a_1 = 5 \\ 2\,x_1 + 1\,x_2 + 0\,x_3 + 1\,e_1 + 0\,e_2 + 0\,a_1 = 6 \\ 1\,x_1 + 2\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,e_1 - 1\,e_2 + 1\,a_1 = 4 \end{cases}$$

Phase 1 : résolution du problème auxiliaire

$$\min\,[\varphi_{aux} = 1\,a_1]$$

Base B			Hors base H			
x_3	e_1	a_1	x_1	x_2	e_2	$b_{/B}$
1	0	0	1	2	0	5
0	1	0	2	1	0	6
0	0	1	1	2	-1	4
0	0	1	0	0	0	0
			-1	-2	1	4

$\rightarrow$ variable entrante : x_2
$\rightarrow \min_{\geq 0}\,(5/2, 6, 2 \mid x_2(s) > 0) \Rightarrow$ variable sortante : a_1
a_1 est supprimée
Plus de variable artificielle dans la base.

Phase 2 :

Base B			Hors base H		
x_3	e_1	x_2	x_1	e_2	$b_{/B}$
1	0	0	0	1	1
0	1	0	$3/2$	$1/2$	4
0	0	1	$1/2$	$-1/2$	2
2	0	-1	1	0	0
			$3/2$	$-5/2$	0

$\rightarrow$ variable entrante : x_1
$\rightarrow \min_{\geq 0}\,(+inf, 8/3, 4 \mid x_1(s) > 0) \Rightarrow$ variable sortante : e_1

Base B			Hors base H		
x_3	x_1	x_2	e_1	e_2	$b_{/B}$
1	0	0	0	1	1
0	1	0	$2/3$	$1/3$	$8/3$
0	0	1	$-1/3$	$-2/3$	$2/3$
0	$3/2$	0	0	$-5/2$	0
			-1	-3	4

L_H négatif : solution optimale atteinte .

6.3 Exemple 3

Problème :

$$\max\left[\varphi = 50\,x_1 + 40\,x_2 + 70\,x_3 + 80\,x_4\right]$$

$$s.c.\ \left\{\begin{array}{r} 2\,x_1 + 4\,x_2 + 8\,x_3 + 6\,x_4 \leq 100 \\ 10\,x_1 + 8\,x_2 + 6\,x_3 + 10\,x_4 \leq 160 \\ 1\,x_1 + 1\,x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 \leq 20 \end{array}\right.$$

Forme standard simpliciale :

$$\max\left[\varphi = 50\,x_1 + 40\,x_2 + 70\,x_3 + 80\,x_4\right]$$

$$s.c.\ \left\{\begin{array}{r} 2\,x_1 + 4\,x_2 + 8\,x_3 + 6\,x_4 + 1\,e_1 + 0\,e_2 + 0\,e_3 = 100 \\ 10\,x_1 + 8\,x_2 + 6\,x_3 + 10\,x_4 + 0\,e_1 + 1\,e_2 + 0\,e_3 = 160 \\ 1\,x_1 + 1\,x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 + 0\,e_1 + 0\,e_2 + 1\,e_3 = 20 \end{array}\right.$$

Base B			Hors base H				
e_1	e_2	e_3	x_1	x_2	x_3	x_4	$b_{/B}$
1	0	0	2	4	8	6	100
0	1	0	10	8	6	10	160
0	0	1	1	1	2	2	20
0	0	0	50	40	70	80	0
			50	40	70	80	0

$\rightarrow$ variable entrante : x_4

$\rightarrow \min\limits_{\geq 0}(50/3, 16, 10 \mid x_4(s) > 0) \Rightarrow$ variable sortante : e_3

Base B			Hors base H				
e_1	e_2	x_4	x_1	x_2	x_3	e_3	$b_{/B}$
1	0	0	-1	1	2	-3	40
0	1	0	5	3	-4	-5	60
0	0	1	1/2	1/2	1	1/2	10
0	0	80	50	40	70	0	0
			10	0	-10	-40	800

$\rightarrow$ variable entrante : x_1

$\rightarrow \min\limits_{\geq 0}(\times, 12, 20 \mid x_1(s) > 0) \Rightarrow$ variable sortante : e_2

Base B			Hors base H				
e_1	x_1	x_4	e_2	x_2	x_3	e_3	$b_{/B}$
1	0	0	1/5	8/5	6/5	-4	52
0	1	0	1/5	3/5	$-4/5$	-1	12
0	0	1	$-1/10$	1/5	7/5	1	4
0	10	0	0	0	-10	-40	800
			-2	-6	-2	-30	920

L_H négatif : solution optimale atteinte .

7 Exercices

7.1 Notations

- $\mathcal{M}_{k,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à k lignes et p colonnes.
- Si $M \in \mathcal{M}_{k,p}(\mathbb{R})$, on notera $m_{i,j}$ ses coefficients.
- Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{k,p}(\mathbb{R})$, on note $M^\top \in M_{p,k}(\mathbb{R})$ sa transposée ($m^\top_{i,j} = m_{j,i}$).
- $\mathbb{R}^k = \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des vecteurs de dimension k.
- $\mathcal{M}_k(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.
- I_k désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
- On note 0_k le vecteur de $\mathbb{R}^k$ constitué uniquement de 0.
- Si M et N sont deux matrices comportant le même nombre de lignes, on note $(\, M \mid N\,)$ la matrice dont les premières colonnes sont celles de M et dont les dernières colonnes sont celles de N.
- Si u et v sont deux vecteurs, on note $\left(\dfrac{u}{v}\right)$ le vecteur dont les premiers éléments sont ceux de u et les derniers éléments sont ceux de v.

7.2 Questions de cours

1. Soit un problème linéaire
$$P = \begin{cases} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left[f(x) = c^\top x\right] \\ A\,x \leq b \\ x \geq 0_n \end{cases}$$
où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ x, c \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m$. Écrivez un algorithme naïf déterminant la solution de ce problème et précisez la complexité de ce dernier.
2. On note $\mathcal{D}_R$ l'ensemble des solutions réalisables de P. Montez que $\mathcal{D}_R$ forme un domaine convexe, *i.e.* que toute combinaison linéaire convexe de points de $\mathcal{D}_R$ est encore dans $\mathcal{D}_R$.
3. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On souhaite résoudre le système linéaire $A\,x = b$. Expliquez ce qu'apporte le problème linéaire suivant :
$$P = \begin{cases} \min\limits_{a\in\mathbb{R}^m} \left[\sum_{i=1}^{m} a_i\right] \\ A\,x + I_m\,a = b \\ x \geq 0_n,\ a \geq 0_m \end{cases}$$
où $a = (a_1, \ldots, a_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ dans la résolution du système.
4. Après avoir rappelé l'intérêt de mettre un problème sous forme standard simpliciale, écrivez le problème suivant :
$$\max_{x\in\mathbb{R}^3} [x_1 + x_2 + x_3]$$
$$s.c. \begin{cases} 2\,x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ -2\,x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
sous cette forme.

7.3 Résolution de problèmes linéaires

1. Résoudre le problème de programmation linéaire suivant :

$$\max\,[\varphi = 3\,x_1 + 3\,x_2 + x_3]$$

$$s.c.\ \begin{cases} 2\,x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + 2\,x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. On se place dans le plan $x_3 = 0$.
   (a) Comparez le coefficient directeur de chacune des contraintes avec les coefficients de la fonction objectif. Que peut-on en déduire sur la nature de la solution ?
   (b) Résolvez graphiquement le problème et associez chacune des itérations du simplexe à un point du graphique.
3. À partir de quelle valeur de c_3 la variable x_3 est-elle non nulle à l'optimum ?
4. Soit P le problème de programmation linéaire suivant :

$$\max\,[\varphi = 3/2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3]$$

$$s.c.\ \begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 - x_3 \leq 5 \\ x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrez que la solution du problème dual est

$$\mathcal{S}^* = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha - \beta = 3/2 \text{ et } \alpha \in [3/2, 2] \right\}$$

7.4 Algorithme du simplexe

1. On souhaite améliorer l'algorithme du simplexe dans certaines situations. Proposez une alternative à la phase 1 pour déterminer une base réalisable initiale dans le cas où le déterminant de la matrice des contraintes est non nul.

7.5 Problème réalisable

1. On considère le programme linéaire suivant, dépendant de $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$\max\,[4\,x_1 - 2\,x_2]$$

$$s.c.\ \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ \varepsilon\,x_1 + (2 - \varepsilon)\,x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(a) Montrez que le problème est réalisable (*i.e.* possède un domaine réalisable non vide) quelque soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

(b) Pour quelles valeurs de ε la valeur optimale est-elle non bornée ?

2. Démontrez le lemme de Farkas (bien traiter le sens direct ainsi que la réciproque) :

$$\exists x, \begin{cases} A\,x = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \forall y,\ y^\top A \geq 0 \Rightarrow y^\top b \geq 0$$

3. En déduire que tout problème de programmation linéaire dont les contraintes sont $\begin{cases} A\,x \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$ possède un domaine réalisable non vide ssi $\forall y, \begin{cases} y^\top A \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y^\top b \geq 0$

4. Pour quelles valeurs de α et β le problème suivant est-il réalisable :

$$\max\,[x_1 + 2\,x_2]$$

$$s.c. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq \alpha \\ 2\,x_2 + x_1 \geq \beta \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7.6 C.O.P.D.

Soient deux problèmes duaux :

$$P = \begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x) = c^\top x\right] \\ A\,x \leq b \\ x \geq 0_n \end{cases} \quad \text{et} \quad P^* = \begin{cases} \min\limits_{y \in \mathbb{R}^m} \left[g(y) = b^\top y\right] \\ A^\top y \geq c \\ y \geq 0_m \end{cases}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ x, c \in \mathbb{R}^n,\ y, b \in \mathbb{R}^m$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on muni $\mathbb{R}^k$ du produit scalaire usuel :

$$\langle\, \cdot\,,\, \cdot\, \rangle : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k : (u, v) \mapsto u^\top v = \sum_{i=1}^{k} u_i \cdot v_i$$

1. Montrez que $\forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m,\ f(x) \leq g(x)$ (on rappelle que le produit scalaire est symétrique).

2. Pour exprimer P et P^* sous forme standard, on introduit les deux vecteurs $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ et $\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$:

$$P = \begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x) = c^\top x\right] \\ (\,A \mid I_m\,) \begin{pmatrix} x \\ \hline e \end{pmatrix} = b \\ x \geq 0_n,\ e \geq 0_m \end{cases} \quad \text{et} \quad P^* = \begin{cases} \min\limits_{y \in \mathbb{R}^m} \left[g(y) = b^\top y\right] \\ \left(A^\top \mid -I_m\right) \begin{pmatrix} y \\ \hline \epsilon \end{pmatrix} = c \\ y \geq 0_m,\ \epsilon \geq 0_n \end{cases}$$

On note $x^*, e^*, y^*, \epsilon^*$ les vecteurs réalisant $f(x^*) = \max[f(x)]$ et $g(y^*) = \min[g(y)]$. Montrez que si $f(x^*) = g(y^*)$, alors :

$$\langle\, e^*\,,\, y^*\, \rangle + \langle\, x^*\,,\, \epsilon^*\, \rangle = 0$$

3. En déduire que

$$\langle\, e^*\,,\, y^*\, \rangle = \langle\, x^*\,,\, \epsilon^*\, \rangle = 0$$

et retrouver les conditions d'optimalités primal-dual.