ESIAL 2A — Mercredi 22 octobre 2008

Graphes et Recherche Opérationnelle

Examen partiel

Durée : 2h

Documents autorisés : uniquement le résumé de cours fourni avec l'énoncé.

Calculatrices non programmables autorisées.

Exercice 1. *Modélisation (4 pts)*

Une entreprise souhaite répartir certains de ses employés dans deux services A et B afin de réaliser 3 taches différentes. Le tableau suivant indique pour chaque service, le nombre de jours nécessaire à la réalisation de chacune des taches. Les besoins estimés par l'entreprise (en personne-jour) sont également indiqués.

	Tache 1	Tache 2	Tache 3
Service A	2	5	4
Service B	5	8	2
Besoins estimés	10	13	21

L'entreprise veut connaitre le nombre d'employés qu'elle doit affecter aux services A et B pour que le critère suivant soit satisfait. Elle veut que le maximum des écarts **en valeur absolue**, pour les 3 tâches, entre les besoins estimés et les besoins réels soit minimum.

1. Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire avec 3 variables. Ces variables représent le nombre d'employés à affecter au deux services (x_1 et x_2) et le maximum des écarts en valeur absolue pour chaque tâche, entre les besoins estimés et réels (x_3).
2. Mettre le problème obtenu sous forme standard.

Exercice 2. *Résolution par l'algorithme du simplexe (7 pts)*

1. Résoudre par l'algorithme du simplexe, le problème de programmation linéaire suivant :

$$\max\,[F = 3\,x_1 + 3\,x_2 + x_3]$$
$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + 2\,x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. On se place dans le plan $x_3 = 0$.
   (a) Comparez le coefficient directeur de chacune des contraintes avec les coefficients de la fonction objectif. Que peut-on en déduire sur la nature de la solution ?
   (b) Résolvez graphiquement le problème et associez chacune des itérations du simplexe (en phase 2) à un point du graphique.

Exercice 3. *Solutions réalisables (4 pts)*

Soit le programme linéaire (PL) suivant

$$(PL) \begin{cases} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left[F(x) = c^\top x\right] \\ \quad Ax \leq b, \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$

avec A une matrice de taille $m \times n$ et les vecteurs $c \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

1. On suppose que (PL) admet deux solutions réalisables optimales x_1^* et x_2^* distinctes. Montrer alors qu'il existe une infinité de solutions réalisables optimales constituées par le segment joignant x_1^* à x_2^* (i.e. toute combinaison convexe de x_1^* et x_2^*).
2. Mettre le problème (PL) sous forme standard. En justifiant votre réponse, donner une condition suffisante sur le second membre b, pour que le problème ainsi obtenu admette une solution réalisable évidente. Donner cette solution réalisable évidente.
3. On considère le programme linéaire suivant, dépendant d'un paramètre $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \max\,[4\,x_1 - 2\,x_2] \\ \quad x_2 \leq 3 \\ \quad \varepsilon\,x_1 + (2-\varepsilon)\,x_2 \leq 4 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

   (a) Montrez que le problème admet des solutions réalisables quelque soit le paramètre $\varepsilon \in \mathbb{R}$.
   (b) Pour quelles valeurs de ε la valeur optimale est-elle non bornée ?

Exercice 4. *Dualité (2 pts)*

Soit le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max\,[F = 3/2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3] \\ \quad x_1 + 2\,x_2 + x_3 \leq 1 \\ \quad x_1 - x_3 \leq 5 \\ \quad x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 \geq 1 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

dont la solution est $(x_1^*,\, x_2^*,\, x_3^*,\, e_1^*,\, e_2^*,\, e_3^*)^\top = (1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 4,\, 0)^\top$

1. Ecrire le problème dual.
2. Montrer que la solution du problème dual est

$$\mathcal{S}^* = \left\{(\alpha,\, 0,\, \beta)^\top \;\mid\; \alpha - \beta = 3/2 \text{ et } \alpha \in [3/2, 2]\right\}$$

Exercice 5. *Analyse de sensibilité (3 pts)*

On considère le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max\,[F = 5\,x_1 + 20\,x_2 + 10\,x_3] \\ \quad 2\,x_1 - x_2 + x_3 \leq 5 \\ \quad x_1 + 3\,x_2 - x_3 \leq 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

En appliquant l'algorithme du simplexe, on obtient le tableau suivant à la dernière étape :

Base B^*		Hors base H^*			
x_3	x_2	x_1	e_2	e_1	
1	0	7/2	1/2	3/2	12,5
0	1	3/2	1/2	1/2	7,5
		-60	-15	-25	$F_{max} = 275$

1. A partir de quelle valeur du coefficient c_1 dans la fonction objectif F, la variable x_1 est-elle non nulle à l'optimum ?
2. Que vaut la matrice inverse $A_{B^*}^{-1}$?
3. Etudier la sensibilité de la solution optimale par rapport au premier coefficient $b_1 = 5$ du second membre des contraintes.