TD sur la théorie des automates 9 novembre 2007

Prérequis : TD 6 + déterminisation d'un automate, minimisation d'un AFD.
Durée : 1 h 50

TD 7 – Déterminisation et minimisation des automates

Partie I : Exercices

Question 1 : Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet et L un langage sur A dénoté par $e = A^*abaA^*$.

a) Décrire le langage dénoté par e.

b) Construire un automate fini $\mathcal{A}$ indéterministe reconnaissant L (précisez en quoi il est indéterministe).

c) Construire un automate fini déterministe équivalent à $\mathcal{A}$.

Question 2 : Soit $\mathcal{A} = (A, Q, q_0, \delta, T)$ un automate fini déterministe sur $A = \{a, b\}$ défini par : $Q = \{i \mid 0 \leq i \leq 8\}$, $q_0 = 0$, $T = \{2, 6, 8\}$ et $\delta : Q \times A \to Q$ décrite par la table suivante :

δ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	6	8	7	5	2	8	2	2	1	7
b	6	5	4	8	2	7	10	5	0	2	8

a) Après avoir vérifié que $\mathcal{A}$ est déterministe, supprimer les états inaccessibles.

b) Minimaliser cet automate et dessiner le graphe sagittal de l'automate minimal obtenu.

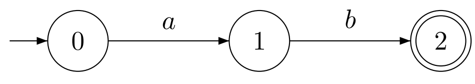
c) Donnez une expression rationnelle (régulière) dénotant $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Partie II : Problème

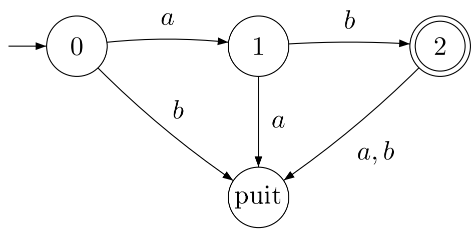
Ce problème a pour objectif l'étude d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des états d'un automate à la base de l'algorithme de minimisation.

Définition 1 : Soit $\mathcal{A} = (A, Q, q_0, \delta, T)$ un automate fini déterministe. On dit que $\mathcal{A}$ est complet ssi la fonction δ est une application, autrement dit, si $\delta(q, a)$ est définie pour tous les couples (q, a) de $Q \times A$.

Remarque 1 : Pour trouver un AFD complet équivalent à un AFD incomplet, il suffit d'ajouter un état puit (état de refus) qui sera l'extrêmité de toutes les transitions non définies. Soit par exemple l'AFD non complet représenté par le graphe suivant.



δ n'est pas définie pour tous les couples : $\delta(0, b)$ n'est pas défini. Un automate fini déterministe complet équivalent est donné par le graphe suivant :



Définition 2 : Pour chaque état $q \in Q$, on note :

$$L_q = \{\alpha \in A^* \mid \delta^*(q, \alpha) \in T\}$$

L_q s'interprète comme étant le langage reconnu par l'automate lorsque q est l'état initial.

Remarque 2 : On remarquera que $\varepsilon \in L_q \Leftrightarrow q \in T$

On considère un AFD complet $\mathcal{A} = (A, Q, q_0, \delta, T)$. On définit sur Q la relation d'équivalence $\sim$ par :

$$\begin{aligned} p \sim q \quad &\Leftrightarrow \quad L_p = L_q \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in A^*,\ (\delta^*(p, \alpha) \in T \Leftrightarrow \delta^*(q, \alpha) \in T) \end{aligned}$$

Définition 3 : On note appelle classe d'équivalence d'un état q et on note $\langle\ q\ \rangle$ l'ensemble :

$$\langle\ q\ \rangle = \{p \in Q \mid p \sim q\}$$

On note $\widetilde{Q}$ l'ensemble des classes d'équivalence : $\widetilde{Q} = \{\langle\ q\ \rangle \mid q \in Q\}$.

Question 1 : Montrer que $\forall (p, q) \in Q^2,\ \forall \alpha \in A^*$:

$$p \sim q \quad \Leftrightarrow \quad \delta^*(p, \alpha) \sim \delta^*(q, \alpha)$$

Question 2 : En déduire que l'on définit une application $\widetilde{\delta}$ de $\widetilde{Q} \times A$ dans $\widetilde{Q}$ en posant :

$$\widetilde{\delta}(\langle\ q\ \rangle, a) = \langle\ \delta(q, a)\ \rangle$$

Question 3 : Démontrer par induction structurelle que l'extension $\widetilde{\delta}^*$ de $\widetilde{\delta}$ à $\widetilde{Q} \times A^*$ vérifie : $\forall (q, \alpha) \in \widetilde{Q} \times A^*$

$$\widetilde{\delta}^*(\langle\ q\ \rangle, \alpha) = \langle\ \delta^*(q, \alpha)\ \rangle$$

Question 4 : Montrer que si $t \in T$ et $t \sim q$ alors $q \in T$.

Question 5 : On pose $\widetilde{q_0} = \langle\ q_0\ \rangle$ et $\widetilde{T} = \{\langle\ t\ \rangle \mid t \in T\}$. Justifier que $\widetilde{\mathcal{A}} = (A, \widetilde{Q}, \widetilde{q_0}, \widetilde{\delta}, \widetilde{T})$ est un AFD complet reconnaissant le même langage que $\mathcal{A}$.

Remarque 3 : Si $\mathcal{A}$ est un AFD complet et monogène (*i.e.* si tous ses états sont accessibles), alors $\widetilde{\mathcal{A}}$ est l'**automate minimal** reconnaissant le même langage que $\mathcal{A}$.

TD sur la théorie des automates 9 novembre 2007

Prérequis : TD 6 + déterminisation d'un automate, minimisation d'un AFD.
Durée : 1 h 50

Correction

Partie II : Problème

Question 1 : Soient p et $q \in Q$.

$$\begin{aligned}
\forall \alpha \in A^*,\ \delta^*(p,\alpha) \sim \delta^*(q,\alpha) &\Leftrightarrow \forall \alpha \in A^*,\ L_{\delta^*(p,\alpha)} = L_{\delta^*(q,\alpha)} \\
&\Leftrightarrow \forall \alpha \in A^*,\ \forall \beta \in A^*,\ \big(\delta^*(\delta^*(p,\alpha),\beta) \in T \ \Leftrightarrow\ \delta^*(\delta^*(q,\alpha),\beta) \in T\big) \\
&\Leftrightarrow \forall \alpha,\beta \in A^*,\ \big(\delta^*(p,\alpha\beta) \in T \ \Leftrightarrow\ \delta^*(q,\alpha\beta) \in T\big) \\
&\Leftrightarrow \forall \gamma \in A^*,\ \big(\delta^*(p,\gamma) \in T \ \Leftrightarrow\ \delta^*(q,\gamma) \in T\big) \\
&\Leftrightarrow p \sim q
\end{aligned}$$

Question 2 : L'énoncé est équivalent à : $\forall p \in \langle\ q\ \rangle,\ \delta(p,a) \in \langle\ \delta(q,a)\ \rangle$, autrement dit :

$$p \sim q \quad \Rightarrow \quad \delta(p,a) \sim \delta(q,a)$$

ce qui a été démontré dans la question précédente.

Question 3 : On précise que l'extension de $\widetilde{\delta}$, notée $\widetilde{\delta}^*$ est définie par, $\forall \langle\ q\ \rangle \in \widetilde{Q}$:

$$\begin{cases} \widetilde{\delta}^*(\langle\ q\ \rangle, \varepsilon) = \langle\ q\ \rangle \\ \forall (a,\beta) \in A \times A^*,\ \widetilde{\delta}^*(\langle\ q\ \rangle, a\beta) = \widetilde{\delta}^*(\widetilde{\delta}(\langle\ q\ \rangle, a), \beta) \end{cases}$$

On procède par induction structurelle sur A^* (demander une définition inductive de A^*) :

- Base : $\alpha = \varepsilon$
  $\widetilde{\delta}^*(\langle\ q\ \rangle, \varepsilon) = \langle\ q\ \rangle = \langle\ \delta^*(q,\varepsilon)\ \rangle$
- Induction : On suppose que $\forall q \in \widetilde{Q},\ \widetilde{\delta}^*(\langle\ q\ \rangle, \beta) = \langle\ \delta^*(q,\beta)\ \rangle$ et on cherche à montrer que cette égalité est vraie pour $\alpha = a.\beta,\ \forall a \in A$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta}^*\left(\langle\ q\ \rangle, \alpha\right) &= \widetilde{\delta}^*\left(\langle\ q\ \rangle, a\beta\right) \\
&= \widetilde{\delta}^*\left(\widetilde{\delta}(\langle\ q\ \rangle, a), \beta\right) \\
&\overset{2^e}{=} \widetilde{\delta}^*\left(\langle\ \delta(q,a)\ \rangle, \beta\right) \\
&\overset{HI}{=} \langle\ \delta^*(\delta(q,a),\beta)\ \rangle \\
&= \langle\ \delta^*(q,a\beta)\ \rangle \\
&= \langle\ \delta^*(q,\alpha)\ \rangle
\end{aligned}$$

Question 4 : Soient t et $q \in Q$ tels que $t \sim q$, càd $L_t = L_q$.

$$t \in T \Leftrightarrow \varepsilon \in L_t \Leftrightarrow \varepsilon \in L_q \Leftrightarrow q \in T$$

Question 5 : $\widetilde{\delta}$ étant une <u>application</u> de $\widetilde{Q} \times A$ dans $\widetilde{Q}$, $\widetilde{\mathcal{A}}$ est un AFD <u>complet</u>.
Soit $\alpha \in A^*$:

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{A}}) &\Leftrightarrow \widetilde{\delta}^*(\widetilde{q}_0, \alpha) \in \widetilde{T} \\
&\Leftrightarrow \widetilde{\delta}^*(\langle\ q_0\ \rangle, \alpha) \in \widetilde{T} \\
&\Leftrightarrow \langle\ \delta^*(q_0, \alpha)\ \rangle\ \in \widetilde{T} \\
&\Leftrightarrow \exists\, t \in T \mid \delta^*(q_0, \alpha) \in\ \langle\ T\ \rangle \\
&\Leftrightarrow \exists\, t \in T \mid \delta^*(q_0, \alpha) \sim t \\
&\Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \in T \quad d'aprs\ 4) \\
&\Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$