TD sur la théorie des langages et des automates octobre 2007

Prérequis : Définition d'un langage régulier, d'un automate fini, d'une transition, de la représentation sagittale d'un automate, d'un calcul, d'un calcul réussi, d'un état accessible, d'un automate fini déterministe, de l'indéterminisme, du prolongement de la fonction transition, d'un langage reconnu par un AF, de $Rec(A^*)$, du théorème de Kleene, de l'algorithme traduisant une ER en AF, d'un langage associé à un état, du lemme d'Arden et de l'algorithme traduisant un AF en ER.
Durée : 1 h 50

TD 6 – Langages réguliers et automates

Partie I : Exercices

Question 1 : Construire des automates finis indéterministes reconnaissant les langages dénotés par les expressions suivantes :
- $e_1 = (a + b)^*$
- $e_2 = (a^*b)^*$
- $e_3 = (a^*b + bb^*a)^* + (baa)^+(ab)^*$

Question 2 : Le mot $aabba$ (resp. $baab$) appartient-il à $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}(e_3)$? Si oui, donnez un calcul réussi dont il est l'étiquette.

Partie II : Problème

Le but de ce problème est l'étude des propriétés des opérations de dérivation à gauche $m^{-1}.\mathcal{A}$ et à droite $\mathcal{A}.m^{-1}$ d'un automate fini $\mathcal{A}$ selon un mot m.

Remarque 1 : Pour simplifier les preuves, nous nous limiterons au cas des automates finis semi-indéterministes, c'est-à-dire les automates finis non déterministes qui ne contiennent pas de transitions instantanées (ou ε-transitions). Les résultats étudiés s'étendent au cadre des automates finis quelconques.

Définition 1 : Un automate fini **semi-indéterministe** sur un alphabet X est un quintuplet $\mathcal{A} = (Q, X, I, T, \gamma)$ composé de :
- Un ensemble fini d'états : Q ;
- Un ensemble d'états initiaux : $I \subseteq Q$;
- Un ensemble d'états terminaux : $T \subseteq Q$;
- Une relation de transition confondue avec son graphe : $\gamma \subseteq Q \times X \times Q$.

(*i.e.* un automate fini indéterministe ne comportant pas de ε-transition.

Remarque 2 : Remarquons que γ est le graphe d'une application de transition $\delta : Q \times X \to \mathcal{P}(Q)$ dont les valeurs sont définies par

$$\forall\, o \in Q,\ \forall\, e \in X,\ \delta(o, e) = \{d \in Q \mid (o, e, d) \in \gamma\}$$

La notation γ est plus adaptée que δ à la formalisation et la construction des preuves dans le cadre des automates indéterministes.

Soit $\mathcal{E} = (Q, X, I, T, \gamma)$ un automate fini semi-indéterministe tel que :

$$Q = \{A, B, C, D, E\}, \quad X = \{a, b\}, \quad I = \{A, B\}, \quad T = \{D, E\} \quad \text{et}$$
$$\gamma = \{(A, a, C), (A, b, D), (B, a, D), (B, b, B), (C, b, E), (D, a, C), (E, a, C)\}$$

Question 1 : Donnez une représentation sagittale de $\mathcal{E}$.

Question 2 : En quoi $\mathcal{E}$ est semi-indéterministe et pas déterministe ?

Remarque 3 : Soit γ^* l'extension de γ à $Q \times X^* \times Q$ définie par :

$$\begin{cases} \forall\, q \in Q,\ (q, \varepsilon, q) \in \gamma^* \\ \forall\, e \in X,\ \forall\, m \in X^*,\ \forall\, o \in Q,\ \forall\, d \in Q,\ \big((o, e.m, d) \in \gamma^*\big) \Leftrightarrow \big(\exists q \in Q,\ ((o, e, q) \in \gamma) \wedge ((q, m, d) \in \gamma^*)\big) \end{cases}$$

On rappelle que le langage sur X^* reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ est :

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{m \in X^* \mid \exists\, o \in I,\ \exists\, d \in T, (o, m, d) \in \gamma^*\}$$

Question 3 : Déterminez une expression rationnelle (régulière) ou ensembliste dénotant $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

On considère désormais les opérations internes sur les automates finis déterministes définies par :

Définition 2 : (Dérivées selon un mot) Soient $\mathcal{A} = (Q, X, I, T, \gamma)$ un automate fini semi-indéterministe et $m \in X^*$, les automates $m^{-1}.\mathcal{A}$ (dérivation à gauche selon m) et $\mathcal{A}.m^{-1}$ (dérivation à droite selon m) sont définis par :

$$\begin{array}{rcl} m^{-1}.\mathcal{A} & = & (Q, X, \{q \in Q \mid \exists\, i \in I, (i, m, q) \in \gamma^*\}, T, \gamma) \\ \mathcal{A}.m^{-1} & = & (Q, X, I, \{q \in Q \mid \exists\, t \in T, (q, m, t) \in \gamma^*\}, \gamma) \end{array}$$

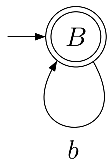
Question 4 : Construire les automates $a^{-1}.\mathcal{E}$, $b^{-1}.\mathcal{E}$, $\mathcal{E}.a^{-1}$ et $\mathcal{E}.b^{-1}$ (seuls les états et les transitions utiles, c'est-à-dire accessibles depuis les états initiaux, devront être construits).

Définition 3 : Soit $\mathcal{A} = (Q, X, I, T, \gamma)$ un automate fini semi-indéterministe. On appelle **état de refus** tout état $q \in Q$ tel qu'il n'existe pas de calcul d'origine q et d'extrémité $e \in T$:

$$\nexists (m, e) \in X^* \times T,\ (q, m, e) \in \gamma^*$$

Remarque 4 : Il n'est pas utile de représenter les états de refus lorsque l'on effectue la représentation sagittale d'un automate.

Question 5 : Montrez que l'automate $\mathcal{E}.a^{-1}$ est équivalent à l'automate suivant :



Question 6 : En déduire une expression rationnelle dénotant $\mathcal{L}(\mathcal{E}.a^{-1})$.

Remarque 5 : Vous pouvez, à titre d'entrainement, déterminer les expressions rationnelles dénotant $\mathcal{L}(a^{-1}.\mathcal{E})$, $\mathcal{L}(b^{-1}.\mathcal{E})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{E}.b^{-1})$.

Remarque 6 : On rappelle que, par définition de γ^*, on a, $\forall\, m, n \in X^*,\ \forall\, o, d \in Q$:

$$\Big(\exists\, q \in Q,\ (o, m, q) \in \gamma^* \wedge (q, n, d) \in \gamma^*\Big) \Longleftrightarrow (o, m.n, d) \in \gamma^*.$$

Question 7 : Soit $\mathcal{A}$ un automate fini semi-indéterministe, montrer que :

- $\forall\, m \in X^*,\ \forall\, n \in X^*,\ n \in \mathcal{L}(m^{-1}.\mathcal{A}) \Leftrightarrow m.n \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$
- $\forall\, m \in X^*,\ \forall\, n \in X^*,\ n \in \mathcal{L}(\mathcal{A}.m^{-1}) \Leftrightarrow n.m \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$