

TD bilan sur la 1^{ère} partie du programme.

19 octobre 2007

Prérequis : Principes de raisonnements, algèbre de Boole, introduction à la théorie des langages.

Durée : 1 h 50

TD 5 – Bilan 1^{ère} partie

☞ Exercice 1

Série d'exercices sur le chapitre « Principes de raisonnements ».

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

2. Soit E un ensemble fini. Démontrer par récurrence sur le cardinal de E que

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$$

☞ Exercice 2

Série d'exercices sur le chapitre « Algèbre de Boole ».

1. Donner la définition d'une fonction booléenne à n variables.
2. Rappeler la définition de la duale d'une fonction booléenne.
3. Rappeler la définition du support d'une fonction booléenne puis donner le support de la fonction

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{B}^3 \mapsto x.y \in \mathbb{B}$$

4. Donner la définition d'une partie génératrice (pas le théorème caractérisant les parties génératrices).
5. Donner la forme normale de *Lagrange* (disjonctive conjonctive) d'une fonction booléenne.
6. Soit $E \subset \mathbb{F}_n$, donnez la définition de $\text{comp}(E)$.
7. Citez les propriétés stables par composition et donnez l'utilité des ces propriétés.
8. Donnez la définition d'un monôme maximal pour une fonction booléenne. Y'a-t-il unicité ?
9. Donnez la définition d'un monôme central.
10. Soit $f \in \mathbb{F}_n$. Que signifie f croissante ?
11. Donnez un exemple de monôme conjonctif, de monôme disjonctif et de monôme canonique.

☞ Exercice 3

Série d'exercices sur le chapitre « Introduction à la théorie des langages ».

1. Rappelez les définitions d'un alphabet
2. Rappelez les définitions d'un mot sur un alphabet A
3. Rappelez les définitions d'un facteur propre d'un mot β
4. Rappelez les définitions d'un langage sur un alphabet A
5. Rappelez les définitions d'un code sur un alphabet A
6. Définissez la fermeture de Kleene d'un langage.
7. Soit $L = \{(ab^n c), n \geq 0\}$ un langage sur $A = \{a, b, c\}$. Parmi les langages suivants, lequel représente L^* ? Donnez un exemple de mot appartenant à L et un appartenant à L^* .

- $L_1 = \{(ab^n c)^p, n \geq 0, p \geq 0\}$
 - $L_2 = \{(ab^n c)^p, n \geq 0, p > 0\}$
 - $L_3 = \left\{ \prod_{i=1}^p (ab^{n_i} c), \forall i \in [1, p], n_i \geq 0, p \geq 0 \right\}$
 - $L_4 = \left\{ \prod_{i=1}^p (ab^{n_i} c), \forall i \in [1, p], n_i \geq 0, p > 0 \right\}$
 - $L_5 = \{(ab^n c), n \geq 0\}$
8. Le langage L défini à la question précédente peut-il être l'itéré d'un autre langage? Si oui, donnez le langage M tel que $L = M^*$, sinon, expliquez pourquoi.
9. Soit $A = \{a, b, c\}$ un alphabet. Ecrire une expression rationnelle (régulière) qui dénote le langage L défini par l'ensemble des mots de A^* contenant exactement deux a .
10. Soit $A = \{a, b, c\}$ un alphabet. Décrivez le langage dénoté par $e = (a + b + c)^* b$
11. On rappelle les propriétés suivantes :
- (a) Tout sous-ensemble d'un code est un code.
 - (b) Si C est un code, $\varepsilon \notin C$
 - (c) Si C est un code, C et $\bigcup_{n \geq 2} C^n$ sont deux ensembles disjoints
 - (d) Si tous les mots de C sont de même longueur non nulle, alors C est un code. On parle alors de code uniforme.
 - (e) Si aucun mot de C n'est préfixe (resp. suffixe) d'un autre mot de C , C est un code. Dans ce cas, le code C est qualifié de code préfixe (resp. suffixe).

Lorsque ces propriétés ne sont pas suffisantes pour montrer qu'un langage est ou n'est pas un code, on a recours à l'algorithme de Sardinas et Patterson qui consiste en la construction d'une suite d'ensembles :

- *Initialisation* : $U_0 = L^{-1} \cdot L \setminus \{\varepsilon\}$
- *Itération* : $U_{n+1} = U_n^{-1} \cdot L \cup L^{-1} \cdot U_n$
- *Condition d'arrêt* : $\begin{cases} \varepsilon \in U_n & \Rightarrow L \text{ n'est pas un code} \\ U_n = U_{n-1} & \Rightarrow L \text{ est un code} \end{cases}$

Parmi les langages suivants, déterminer ceux qui sont des codes¹

- $L_1 = \{0, 10, 11\}$
- $L_2 = \{00, 100, 10\}$
- $L_3 = \{0, 01, 10\}$

¹On demande une démonstration pour chaque langage. Il est recommandé d'utiliser prioritairement les propriétés.