ECOLE DES MINES DE NANTES

Modélisation stochastique et analyse de données

Formation FIL - Année 1

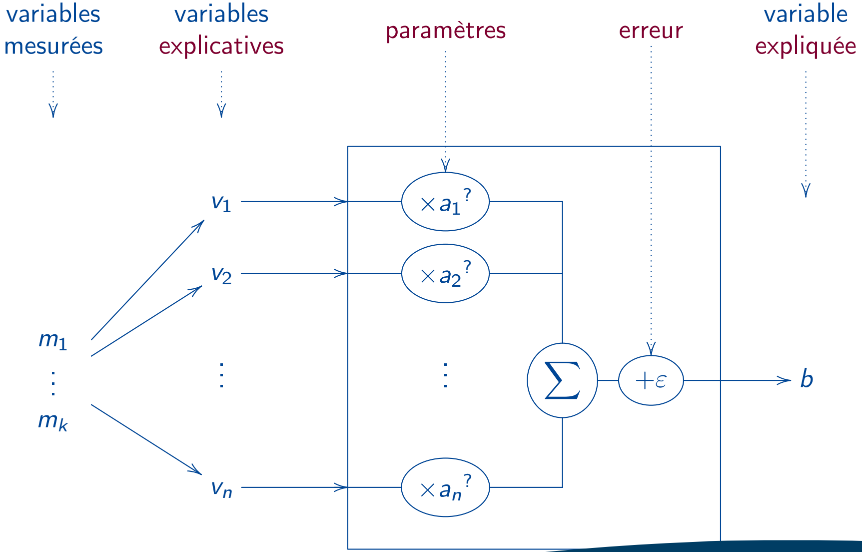
Régression par la méthode des moindres carrés – 2011/2012

Tony Bourdier

Plan

1. Comprendre le problème et savoir modéliser (suite et fin)
2. Savoir résoudre et appliquer

Rappel


variables mesurées
variables explicatives
paramètres
erreur
variable expliquée
m_1
m_k
v_1
v_2
v_n
$\times a_1{}^?$
$\times a_2{}^?$
$\times a_n{}^?$
$\sum$
$+\varepsilon$
b

Forme matricielle

Dans le cas linéaire, on exprime le modèle sous forme matricielle à partir de l'échantillon :

$$
\begin{array}{c}
\text{mesure}_1 \rightarrow \\
\text{mesure}_2 \rightarrow \\
\vdots \\
\vdots \\
\text{mesure}_m \rightarrow
\end{array}
\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}
v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,n} \\
v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
v_{m,1} & v_{m,2} & \dots & v_{m,n}
\end{pmatrix}}_{A}
\times
\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{x}}^{\hat{b}}
+
\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}}_{\varepsilon}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b}
$$

- A : matrice des données (valeur donnée)
- x : vecteur des paramètres (valeur recherchée)
- $\hat{b}$: vecteur réponse estimé par le modèle (valeur déduite : $\hat{b} = A.x$)
- ε : vecteur des erreurs (valeur déduite : $\varepsilon = b - \hat{b}$)
- b : vecteur réponse (valeur donnée)

Exemples

#	Modèle	Mesures
1	$z = a + b.x + c.y + \varepsilon$	$(x_i, y_i, z_i)_{i=1,\ldots,m}$
2	$z = a + b.x + c.y + d.x^2 + e.x.y + f.y^2 + \varepsilon$	$(x_i, y_i, z_i)_{i=1,\ldots,m}$
3	$p = m.k^\alpha.t^\beta + \varepsilon$	$(p_i, k_i, t_i)_{i=1,\ldots,m}$
4	$z = \lambda.e^{\lambda.t} + \varepsilon$	$(z_i, t_i)_{i=1,\ldots,m}$
5	$y = a.cos\left(2\pi.t/T\right) + \varepsilon$	$(y_i, t_i)_{i=1,\ldots,m}$
6	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + r.cos(\theta) \\ b + r.sin(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$	$(x_i, y_i, \theta_i)_{i=1,\ldots,m}$
7	$v = \dfrac{2}{a.t^2} + \varepsilon$	$(v_i, t_i)_{i=1,\ldots,m}$
8	$v = \dfrac{2}{1 + a.t^2} + \varepsilon$	$(v_i, t_i)_{i=1,\ldots,m}$
9	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b.t \\ b + c.t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$	$(x_i, y_i, t_i)_{i=1,\ldots,m}$
10	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b.t \\ c.e^{-b.t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$	$(x_i, y_i, t_i)_{i=1,\ldots,m}$
11	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b.t \\ b.e^{-c.t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$	$(x_i, y_i, t_i)_{i=1,\ldots,m}$

Plan

1. Comprendre le problème et savoir modéliser
2. Savoir résoudre et appliquer

Rappels (Algèbre linéaire)

ECOLE DES MINES DE NANTES

- Vecteur $v \in \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$
- Vecteur = matrice à une seule colonne
- $v^\top = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ = matrice à une ligne et n colonnes

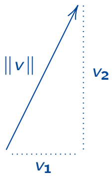
Rappels (Algèbre linéaire)

- $v^\top.u = u^\top.v = (v_1, \ldots, v_n).\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i.v_i$:

  produit scalaire, noté $(\ u \mid v\ )$ ou $(\ v \mid u\ )$ (symétrique)

- $(\ v \mid v\ ) = v^\top.v = (v_1, \ldots, v_n).\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \|v\|^2$

  Exemple (dimension 2) : $v = (v_1, v_2)$



Problème

On cherche x minimisant la norme (= taille) de l'erreur ε dans $Ax + \varepsilon = b$:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

1. Recherche « manuelle » d'une solution sur un exemple
2. Calcul théorique de la solution
3. Mise en oeuvre informatique

Recheche « manuelle » d'une solution

On cherche x minimisant la norme (= taille) de l'erreur ε dans $Ax + \varepsilon = b$:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|\varepsilon\|^2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

- Soient le modèle :

$y = f(t) = a + b.t + c.t^2$

et l'échantillon suivant :

i	$(t_i \,,\, y_i)$
1	(3 , 8.1)
2	(2 , 4.25)
3	(4 , 14.15)
4	(5 , 22.05)
5	(9 , 73.5)
6	(7 , 43.85)
7	(1 , 1.9)

- Calculez $\|\varepsilon\|^2$ pour différentes valeurs de x.

```
Matrix createMatrix(int m, double... val);
void print(String name, Matrix m);
double Matrix.norm2();
double Matrix.times(Matrix m);
double Matrix.minus(Matrix m);
double Matrix.plus(Matrix m);
```

Exemple : `createMatrix(2,1.,2.,3.,4.,5.,6.);`

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Problème

On cherche x minimisant la norme (= taille) de l'erreur ε dans $Ax + \varepsilon = b$:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

1. Recherche « manuelle » d'une solution sur un exemple
2. Calcul théorique de la solution
3. Mise en oeuvre informatique

Compléments (Algèbre linéaire)

Développement

- $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2.(\ u \mid v\ )$ $\quad u, v \in \mathbb{R}^n$
- $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2.(\ u \mid v\ )$ $\quad u, v \in \mathbb{R}^n$
- $(\ u \mid k.v\ ) = (\ k.u \mid v\ ) = k.(\ u \mid v\ )$ $\quad u, v \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$
- $k.v = v.k$ $\quad v \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$

Transposition

- $(A.B)^\top = B^\top.A^\top$ $\quad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- $(A^\top)^\top = A$ $\quad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

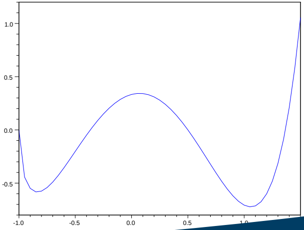
Compléments (Analyse)

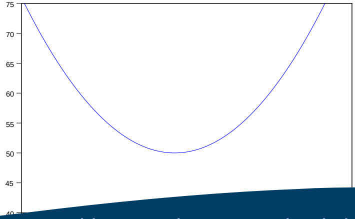
Dérivation

- $\frac{\partial}{\partial v}\left(k.f(v)\right) = k.\frac{\partial}{\partial v}\left(f(v)\right)$ $\qquad v \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$
- $\frac{\partial}{\partial v}\left(f(v) + g(v)\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(f(v)\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(g(v)\right)$ $\qquad v \in \mathbb{R}^n$
- $\frac{\partial}{\partial v}\left(u^\top.v\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(v^\top.u\right) = u$ $\qquad u, v \in \mathbb{R}^n$
- $\frac{\partial}{\partial v}\left(v^\top.A.v\right) = (A^\top + A).v$ $\qquad v \in \mathbb{R}^n, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Minimalité

- Si $f(v)$ est convexe, alors $f(x)$ minimal $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial v}\left(f(v)\right) = 0$





Calcul théorique de la solution

On cherche x minimisant la norme (= taille) de l'erreur ε dans $Ax + \varepsilon = b$:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

Propriété : la fonction $E(x) = \|Ax - b\|^2$ est convexe.

Calculez la solution (x tel que $E(x)$ soit minimal en fonction de A et b).

Problème

ECOLE DES MINES DE NANTES

On cherche x minimisant la norme (= taille) de l'erreur ε dans $Ax + \varepsilon = b$:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

1. Recherche « manuelle » d'une solution sur un exemple
2. Calcul théorique de la solution
3. Mise en oeuvre informatique

Mise en oeuvre

ECOLE DES MINES DE NANTES

- Compression de données de dessins vectoriels
- Estimation de deux types d'« objets » :
  - les courbes polynomiales :
    $\rightarrow$ modèle : $y = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + a_4.x^4 + a_5.x^5$
    $\rightarrow$ mesures $= (x_i, y_i)_{i=1\ldots m}$
  - les cercles :
    $\rightarrow$ modèle : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + r.cos(\theta) \\ b + r.sin(\theta) \end{pmatrix}$
    $\rightarrow$ mesures $= (x_i, y_i, \theta_i)_{i=1\ldots m}$
- Complétez la classe `MoindresCarres`

Une question ? Un doute ? Une incertitude ?